

LÆREBOG I VIDEREGÅENDE
GEOTEKNIK 1

BRUD
i
JORD

MOUST JACOBSEN

LÆREBOG I VIDEREGÅENDE GEOTEKNIK 1

Forside

Denne lærebog er udarbejdet i forbindelse med udarbejdelsen af "Geoteknik og Fundament", på stillingsinstruksens i Forsvarsstatens med A/C. Den er den første af i alt tre lærebøger i "Videregående Geoteknik".

Staf 1 : Brud i Jord
Staf 2 : Jord
Staf 3 : Brud i Jord

BRUD

I

JORD

Regnerne er en udbygning af de tidligere læste geotekniske grundlæggende, og kan derfor ikke betragtes som grundlæggende.

Regnerne er udarbejdet i meget nøjagtig udgave. De fleste udregninger er dog så hurtige, at de kan gøres efter kort tid, dels er der stadigvæk nye metoder til at løse de gamle problemer stærkt lettere og mere præcist end tidligere. Der er derfor taget hensyn til, at de nye metoder, der er udviklet inden for de senere år, er taget med i denne udgave.

Regnerne indeholder mange og meget dygtige og nøjagtige udregninger af tekniske Hinge Tilstande og tekniske løsninger. Det er derfor, der takkes for deres store indsats og alting er meget godt.

København, marts 1959

MOUST JACOBSEN

Forord

Denne lærebog er udarbejdet i forbindelse med undervisningen i "Geoteknik og Fundering" på civilingeniørlinjen i Konstruktion ved AUC. Det er den første af i alt tre lærebøger i "Videregående Geoteknik":

- Bind 1 : Brud i Jord
- Bind 2 : Sætninger i Jord
- Bind 3 : Svingninger i Jord

Bøgerne er en udbygning af almindelig kendt geoteknisk grundviden, og kan derfor ikke anvendes som grundbøger.

Bogen er næppe i nogen endelig udgave. Dels foregår udviklingen i dag så hurtigt, at den er forældet efter kort tid, dels er der stadigvæk nye emner at tage op. Således burde bogen strengt taget også indeholde et kapitel om pæleberegninger, specielt de store pæle, der anvendes inden for offshore-teknik.

Bogens tekstbehandling og lay-out skyldes et meget dygtigt og omhyggeligt arbejde af sekretær Birte Torstveit og teknisk assistent Lizzi Levin, der takkes for deres store indsats og aldrig svigtende omhu.

Aalborg, marts 1989

Moust Jacobsen

1950

The following is a list of the names of the persons who have been appointed to the various positions of the Board of Directors of the Corporation for the year 1950.

John J. Smith	1950
Robert L. Johnson	1950
William H. Brown	1950

The Board of Directors of the Corporation has elected the following persons to the various positions of the Board for the year 1950.

John J. Smith, Robert L. Johnson, William H. Brown, and the other members of the Board of Directors have been elected to the various positions of the Board for the year 1950.

The Board of Directors of the Corporation has elected the following persons to the various positions of the Board for the year 1950.

John J. Smith

Robert L. Johnson

Indholdsfortegnelse

1	Indledning	9
2	Jords struktur	11
2.1	Indledning	11
2.2	Sand	11
2.3	Ler	14
2.4	Gytje	17
2.5	Andre jordarter	18
2.6	Sedimenter	18
3	Statiske forhold	21
3.1	Ydre kræfter	21
3.2	Indre kræfter	21
3.3	Ligevægt	22
3.4	Kræfters transformation	26
3.5	Hovedspændingssnit	29
3.6	Mohrs cirkler	32
3.7	Oktaederplanet	37

4	Geometriske forhold	41
4.1	Flytninger	41
4.2	Tøjninger	43
4.3	Rotation	45
4.4	Kompatibilitet	46
4.5	Analogier til spændinger	47
4.6	Mohrs cirkel for tøjninger	48
4.7	Oktaederplanet	49
5	Jords styrke	52
5.1	Indledning	52
5.2	Laboratorieforsøg	53
5.3	Arbejdskurver	56
5.4	Drænet tilstand	60
5.5	Virkelige styrkeparametre	66
5.6	Geotekniske friktionshypoteser	68
5.7	Kohæsion og dilatation	74
5.8	Udrænet tilstand	79
5.9	Virkningen af smalle brudzoner	84
5.10	Oversigt over drænedede styrkeparametre	87
6	Brudanalyser	89
6.1	Indledning	89
6.2	In-situ spændinger	91
6.3	Udrænet brud	91
6.4	Drænet brud	95
6.5	Indførelse af sikkerhed	96
6.6	Bevægelig last	96
6.7	Konklusion	97

7	Plasticitetsteoriens fundament	99
7.1	Indledning	99
7.2	Spændingstilstanden	100
7.3	Tøjningstilstanden	101
7.4	Arbejdslikningen	102
7.5	Løsningsmetoder	104
8	Udrænet brud i ler	109
8.1	Indledning	109
8.2	Spændingstilstande	109
8.3	Tøjningstilstande	110
8.4	Kinematisk tilladelige løsninger	111
8.5	Statisk tilladelige løsninger	121
8.6	Sammenligning af metoderne	127
9	Drænet brud i rent friktionsmateriale	129
9.1	Spændingstilstande	129
9.2	Tøjningstilstande	130
9.3	Kinematisk tilladelige løsninger	131
9.4	Statisk tilladelige løsninger	142
9.5	Eksempel på beregning med forskellig φ' og ν . . .	144
9.6	Materialsvækkelse	148
10	Statisk bestemte brud	153
10.1	Indledning	153
10.2	Grundlæggende ligninger	154
10.3	Spændingsvariationer langs med brudlinier	155
10.4	Statiske forhold ved jordoverflade	158
10.5	Statiske forhold ved væg	160

10.6	Ligevægt af element	163
11	Plasticitetsteoriens praktiske anvendelse	165
11.1	Indledning	165
11.2	Superpositionsprincippet	165
11.3	Valg af brudmåde	166
11.4	Partielt spændingsfelt	167
11.5	Fordeling af jordtryk	169
12	Plasticitetsteoriens begrænsninger	175
12.1	Indledning	175
12.2	Brud i stabile jordarter	176
12.3	Progressivt brud	177
A	Coulombs brudbetingelse	183
A.1	Hovedspændinger	184
A.2	Triaxialforsøg	185
A.3	Radius og centrum i Mohrs cirkel: τ_r og σ'_c	185
A.4	Middelspænding og deviatorspænding: p' og q'	186
B	Afbildning af tredimensionale spændingstilstande	187
C	Litteraturliste	191

D Symbolliste

Kapitel I

Indledning

Med en grundlæggende behandling af rumgeometri og geometriske konstruktioner i forbindelse med et særligt udvalgt område af rumgeometri i forbindelse med rumgeometri, med særlig henblik på rumgeometri, rumgeometri og rumgeometri, som geometriske konstruktioner og rumgeometri.

Den enkelte konstruktion er af rumgeometri og rumgeometri i rumgeometri og rumgeometri, rumgeometri og rumgeometri. Den enkelte konstruktion er af rumgeometri og rumgeometri, rumgeometri og rumgeometri.

Den geometriske konstruktion er af rumgeometri og rumgeometri, rumgeometri og rumgeometri, rumgeometri og rumgeometri. Den enkelte konstruktion er af rumgeometri og rumgeometri, rumgeometri og rumgeometri.

Den enkelte konstruktion er af rumgeometri og rumgeometri, rumgeometri og rumgeometri, rumgeometri og rumgeometri. Den enkelte konstruktion er af rumgeometri og rumgeometri, rumgeometri og rumgeometri.

Den enkelte konstruktion er af rumgeometri og rumgeometri, rumgeometri og rumgeometri, rumgeometri og rumgeometri. Den enkelte konstruktion er af rumgeometri og rumgeometri, rumgeometri og rumgeometri.

10.1.1	Use of the method	102
10.1.2	Use of the method	103
11	Fluorination of organic compounds	110
11.1	Introduction	110
11.2	Superficial fluorination	111
11.3	Yield of fluorination	112
11.4	Partial substitution	113
11.5	Fluorination of polymers	114
12	Fluorination of organic compounds	115
12.1	Introduction	115
12.2	Yield of fluorination	116
12.3	Fluorination of polymers	117
13	Fluorination of organic compounds	118
13.1	Introduction	118
13.2	Yield of fluorination	119
13.3	Fluorination of polymers	120
A	Continuous fluorination	121
A.1	Introduction	121
A.2	Fluorination	122
A.3	Yield of fluorination	123
A.4	Fluorination of polymers	124
B	Fluorination of organic compounds	125
B.1	Introduction	125
B.2	Fluorination	126
B.3	Yield of fluorination	127
B.4	Fluorination of polymers	128
C	Fluorination	129
C.1	Introduction	129
C.2	Fluorination	130
C.3	Yield of fluorination	131
C.4	Fluorination of polymers	132

Kapitel 1

Indledning

Ved en korrekt beregning af tøjnings- og spændingsændringer i det indre af et materiale, fremkaldt af ændringer i materialets ydre påvirkninger, må opfyldes tre betingelser, nemlig den statiske betingelse, den geometriske betingelse og den fysiske betingelse.

Den statiske betingelse er, at enhver lille del af et legeme i ro skal være i ligevægt, herunder også enhver del af randen. Endvidere skal spændingstilstanden være mulig, hvilket betyder, at brudspændinger ikke må overskrides.

Den geometriske betingelse er, at legemet skal bevare sin sammenhæng under en tilstandsændring, således at der ikke opstår adskillelsesbrud eller at to forskellige punkter i legemet føres over i samme punkt.

Disse to betingelser gælder for ethvert materiale, der kan betragtes som et kontinuum. Selvom et kornet materiale som jord kun i nogen grad opfylder disse betingelser, betragtes de også i geoteknikken som grundlaget for alle spændings- og tøjningsberegninger. De grundlæggende tanker er derfor velkendte fra kontinuummekanikken, men vil dog blive repeteret på kort form i kap. 3 og 4.

Den fysiske betingelse sammenknytter spændinger og tøjninger og afhænger derfor i høj grad af materialet. Forskellen mellem de beregningsmetoder, der anvendes i geoteknik og i bærende konstruk-

tioner kan således henføres til forskelle i materialet. Fra en geoteknisk synsvinkel er stål således et materiale med så høj en kohæsion, at man ikke behøver at medtage et eventuelt friktionsled i ståls styrke. Jords styrke- og tøjningsegenskaber er relativt komplicerede, og det viser sig ved selv simple beregningsmetoder.

Anvendelsen af komplicerede teorier forudsætter i praksis, at problemet har en vis økonomisk rækkevidde, og at de lokale jordbundsforhold kendes tilstrækkelig godt. Kendskab til teorierne giver dog altid mulighed for et kvalificeret skøn over tilnærmelsernes karakter og beregningsresultatets værdi.

Kapitel 2

Jords struktur

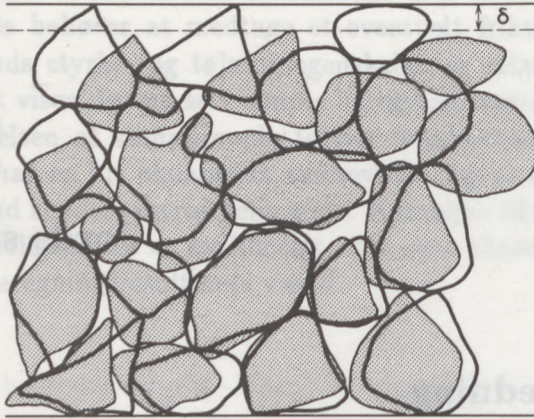
2.1 Indledning

Det er vigtigt at gøre sig klart, at jord som byggemateriale betragtet opfører sig anderledes end de øvrige byggematerialer på grund af jordens strukturelle opbygning. Jorden kan i øvrigt ikke betragtes som kun ét materiale selv om egenskaberne udtrykkes på samme måde. Der er således stor forskel på grus-, sand- og siltjordarterne, i det følgende kaldt sand, de rene mineralske lerarter og jordarter med dominerende organisk indhold såsom gytje, tørv og tørvedynd, som i det følgende kaldes for gytje.

Følgende gennemgang af jordens struktur er bevidst gjort meget summarisk og har da også kun til formål at vise grovstrukturens indflydelse på de geotekniske egenskaber.

2.2 Sand

Ordet sand vil i det følgende blive anvendt om en jordart, der består af mineralske og uelektriske korn som fx kvartskorn. Ved aflejringen af sand vil de aktuelle strømningsforhold pakke kornene med et poretal, som derefter ikke kan ændres væsentligt med mindre der fremkaldes brud i materialet.



Figur 2.1: Bevægelser i kornet masse ved sammentrykning.

Kræfter overføres fra korn til korn som kontaktryk, der ofte kan være betydelige. Ved en belastning vil kræfterne fordele sig meget ujævnt; nogle kontaktpunkter vil blive belastet så hårdt, at selv en lille belastningsforøgelse vil medføre en glidning og en spændingsomlejring (se figur 2.1). Nogle korn vil ikke kunne opretholde en ligevægt, men vil rotere indtil nye kontaktpunkter etableres. Ved en isotrop belastning vil dette kun finde sted i begrænset omfang og normalt kun første gang belastningen påføres. Ved spændingstilstande i nærheden af brud bliver glidninger og rotationer fremherskende.

Såfremt poretallet er større end en vis værdi e_{cr} , vil rotationen i gennemsnit føre til en formindskelse af poretallet. Er poretallet mindre end e_{cr} , vil rotationen overvejende løfte kornene fra hinanden, og e vil vokse. Rotationer og glidninger er ikke reversible og ved en aflastning fra og genbelastning til en bestemt spændingstilstand giver de derfor kun anledning til små tøjninger.

Kornene vil i sammenligning hermed normalt kunne betragtes

som ueftergivelige. Omkring spidserne på et korn vil spændingerne dog være så store, at en vis reversibel tøjning vil være målelig, men ubetydelig. Ved store belastninger kan kornene knuses med en ændring af jordens egenskaber til følge.

Ved en belastningsforøgelse sker de fleste omlejringer momentant, men inden strukturen er faldet helt til ro, kan der blive overført så store forskydningsspændinger til en række kontaktpunkter, at fornyede glidninger og spændingsomlejringer vil finde sted. Ved isotrope spændingstilstande og ved små forskydningsspændinger vil sådanne omlejringer hurtigt ebbe ud, men nær brud kan de antage betragtelige størrelser og få vedvarende karakter. Fænomenet omtales normalt som krybning.

Til beregningsmæssige formål må indføres en forenkling af det ret komplicerede rumlige gittersystem. Man betragter en gennemsnitsværdi af belastningen på en flade, den såkaldte effektive spænding σ' , og indfører analogt hermed tøjninger der er gennemsnitsværdier for et vist volumen. Da trækspændinger ikke kan overføres fra det ene korn til det andet, regnes trykspændinger positive, og tilsvarende regnes sammentrykninger også positive.

Ved denne forenkling ses således bort fra virkningen af rotationer af kornene og nedknusning af korn ved høje kontakttryk. Ved modelforsøg ses der herved bort fra skalaeffekter stammende fra, at sandkornene har en vis størrelse i forhold til kontaktfladerne. Undersøgelser med forskellige skaleringsforhold tyder på, at virkningen først er mærkbar ved meget små modeller.

Kvartskorn er uelektriske, og der burde derfor ikke være forskel på helt vandmættet og helt tørt sands egenskaber, selv om det kan diskuteres, om vand har en smørende virkning på friktionen mellem kornene. Såfremt sandet er delvist vandmættet, spiller porevinkelvandet imidlertid en væsentlig rolle, fordi der gennem trækpåvirkninger i meniskerne kan skabes ekstra effektive spændinger mellem kornene og dermed en tilsyneladende forøgelse af sands styrke. Den forøgede styrke må ikke medregnes i praksis, fordi den forsvinder

ved vandmætning. Såfremt sands styrke bedømmes ved brudforsøg på såkaldt vandmættede prøver, betyder selv en procentvis ringe manglende vandmætning, at sandets styrke bedømmes for højt. Af sikkerhedsmæssige grunde bør brudforsøg derfor udføres på tørre prøver.

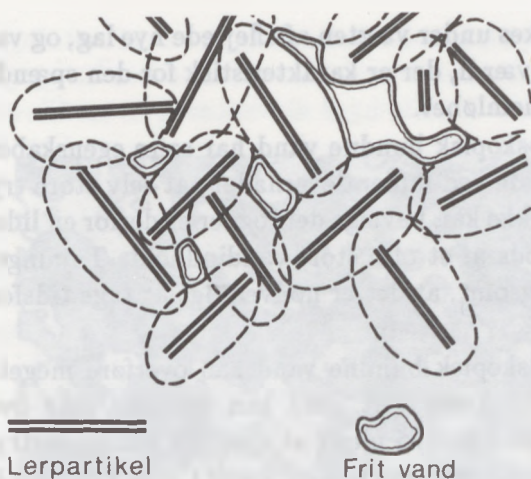
Sands kapillaritet er så ringe, at in situ spændingerne alene af den grund ikke kan bevares i en optaget prøve.. Dertil kommer, at spændingsomlejringer i sand kun kræver ganske små tøjninger, og prøven vil derfor næsten altid være forstyrret.

2.3 Ler

Medens sand kan være enten helt vandmættet eller helt tørt, uden at det ændrer på dets styrke- og tøjningsegenskaber, indgår vandet i en intim forbindelse med lerminerallerne som det såkaldt hygroskopisk bundne vand og præger derved lerjordens egenskaber afgørende. (Se figur 2.2)

Lerpartiklerne er nemlig elektrisk ladede og kan binde ioner og vandmolekyler, der er elektriske dipoler i et slags gitter, der i nærheden af lerflagen er bundet i et regelmæssigt mønster, men bliver løsere længere væk fra lerpartiklen. Dette gitter kan overføre små spændinger uden at brydes, men brydes systemet, vil vandet blive flydende og dræne bort. Elementarpartiklerne i lerstrukturen består altså af lerpartikler med tilhørende ioner og hygroskopisk bundet vand og vil i modsætning til sandkorn kunne skifte volumen, hvorved tilsvarende tøjninger bliver meget større og også krybningsfænomenerne spiller en større rolle. Såfremt en ler aflastes vil vand suges op og igen bindes hygroskopisk. En ler "sveller" op, hvad en sand ikke gør.

Nogle af lerminerallerne – fx montmorrilonit – kan endog binde vandmolekyler inde mellem elementarlagene. De indgår som væsentlige bestanddele af de fede tertiære lerarter, fx Lillebæltsler, der netop "sveller" op ved aflastning og mister deres styrke.



Figur 2.2: Skitse af lers struktur.

Ved store volumenændringer – hvordan de end frembringes – vil meget af det hygroskopisk bundne vand løsrives, og det resterende vandige gitter være bragt meget i uorden. Som tiden går, vil bindingerne inden for det reducerede gitter dog igen reableres. Ved forsøg med lerarter, hvor forbelastningstrykket overskrides væsentligt, vil en umiddelbart fortsat undersøgelse afsløre leret som 'æltet' med større tøjninger og mindre styrke, end man skulle forvente ud fra det reducerede poretal. Har man et halvt år til rådighed, kan gitteret reableres og relevante målinger foretages. Ved store forskydninger uden volumenændringer ødelægges tilsyneladende kun en meget lille del af gitteret, og det er ikke muligt at konstatere nogen æltning. Derfor kan på forbelastet ler udføres flere udrændede brudforsøg på samme prøve, såfremt forbelastningstrykket ikke overskrides.

Lerpartiklerne er meget små og vil af den grund være længe om at aflejres og det kan kun ske på roligt vand. Allerede i denne fase vil leret være omgivet af bundet vand og aflejringens øvre lag vil have et vandindhold, der er karakteristisk for et givet mineral. Vandind-

holdet mindskes under vægten af aflejrede nye lag, og vandindholdet vil antage en værdi, der er karakteristisk for den spændingshistorie, leret har gennemløbet.

Det hygroskopisk bundne vand har sære egenskaber. Det er så fast bundet inde ved mineraloverfladen, at selv store trykgradienter i porevandet ikke kan bevæge det, og ler er derfor en lidet permeabel jordart på trods af et ofte stort vandindhold. Tøjningerne forløber derved så langsomt, at det er nødvendigt at tage tidsforløbet med i betragtning.

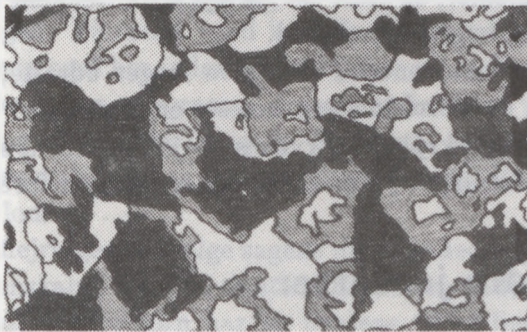
Det hygroskopisk bundne vand kan overføre meget store trækspændinger. Normalt frit vand kan derimod ikke overføre trækspændinger, eller som vi plejer at sige det, kan undertrykket (under normalt atmosfærisk tryk) højst være 1 atm (100 kN/m^2). Men i de fede tertiære lerarter kan leret være vandmættet mere end 100 m over grundvandsspejlet! Også træer kan udøve et meget stort sug i jorden og i ler kan undertrykket af den grund blive meget stort.

Såfremt en lerklump tørrer langsomt ind, vil den først skrumpes meget uden at blive tør på overfladen, fordi kapillære kræfter trykker prøven sammen. Først når sammentrykningen har nået en størrelse, der svarer til de maksimale kapillære spændinger, vil prøven blive tør uden yderligere svind (den såkaldte svindgrænse).

Nogle af de ældste målinger, der udføres på ler, er bestemmelse af flydegrænsen w_L , plasticitetsgrænsen w_p (og eventuelt svindgrænsen). Bestemmelse foretages i Danmark i Casagrandes slag-apparat (w_L) og ved udrulning af 3mm tykke pølser (w_p).

Målemetoderne er besynderlige, men fortæller noget om lermine-ralets evne til at binde vandmolekylerne. De benyttes derfor stadig som en vigtig registreringsmetode, der fortæller den erfarne geotekniker noget om, hvilke problemer en bestemt lerart i en bestemt situation kan tænkes at forvolde.

Ved prøveoptagning vil kapillærspændinger holde prøven sammen og intakte lerprøver kan overføres til laboratoriet. Her må udtørring undgås, fordi de effektive spændinger da kan vokse op over



Figur 2.9: Skitse af gytjes struktur.

de tidligere forkonsolideringstryk. Men med lidt omhu kan en prøve være så intakt, at det er muligt at måle både middel-insitetrykket og forbelastningstrykket.

2.4 Gytje

Organiske jordarter behandles normalt som ler, fordi de geotekniske problemstillinger kan være ret ens for de to jordartstyper.

Grundsubstansen består af mere eller mindre nedbrudt materiale, der stammer fra dyr eller planter. "Kornstørrelsen" kan variere meget og "kornformen" kan være vanskelig at beskrive. I grundsubstansen forekommer desuden næsten altid ler eller sand. (Se fig. 2.3)

Den relative mængde af organisk materiale kan bestemmes ved glødetab og det øvrige materiale kan inddeles i fraktioner ved sigtning og slemning.

Grundsubstansen ligner lerpartiklerne deri, at de enkelte partik-

ler sammentrykkes under belastning, hvorved sætningsproblemerne bliver dominerende. I ekstreme tilfælde kan en gytje have vandindhold op til 5 - 900%, hvad der naturligvis medfører meget store sætningsproblemer, og stort set gør gytje uanvendelig som underlag for anlægs- og byggevirkksomhed.

Krybningsfænomenerne kan blive meget udtalte, og risiko for nedbrydning ved forrådnelsesprocesser er til stede.

Ved langvarig krybning trykkes gytjen sammen, svarende til et højere forbelastningstryk end det, der egentlig er forekommet.

2.5 Andre jordarter

Andre jordartstyper end de nævnte forekommer hyppigt. Således dækkes store dele af Danmark af glaciale aflejringer, der er regellose sammenblandinger af de jordarter, som isen har truffet på sin vej mod aflejningsstedet. En nærmere analyse viser, at de mindste kornstørrelser har dominerende indflydelse på jordartens egenskaber. Således betyder et lerindhold på 15 % , at jordarten opfører sig som en ler. Leret er nemlig aflejret i hulrummet mellem de større korn og gør derved moræneleret lidet permeabel. Endvidere er moræneler i besiddelse af kapillaritet ($h_c = 2 - 20 \text{ mVs}$). Den maximale kapillarspænding $\gamma_w h_c$ er dog normalt så meget mindre end forbelastningstrykket, at denne jordart kan tåle nogen udtørring uden at ændre karakter.

Andre velkendte jordarter er kalk og kridt, hvis konsistens strækker sig fra halvflydende til klippefast og som normalt passes ind i en af de øvrige nævnte båse eller betragtes som klippe.

2.6 Sedimenter

De løse jordarter, som det drejer sig om her, er alle sedimenter, de fleste aflejret af vand eller is, men nogle også af vinden eller

menneskene.

Vand- og vindsedimenter bliver altid lagdelte med næsten vandrette grænser. Kornene i de enkelte lag veksler i størrelse, og også poretallet varierer, afspejlende de vekslende strømningsforhold under aflejringen. På roligt vand kan afsættes marine lerer af stor mægtighed, men også her tyder undersøgelser på en form for "lagdeling" eller orientering af kornene. I nogle sedimenter veksler lag af fint ler med lag af silt eller finsand. Et sådant sediment har klart anisotrope egenskaber, fx er permeabiliteten langt større i vandret retning end i lodret.

Glaciale aflejringer er i følge sagens natur rodede og med stærkt varierende egenskaber fra sted til sted. En nøjere undersøgelse viser dog, at de langstrakte korn har en tendens til at ligge orienteret i samme retning. Det er ikke sikkert, at sådanne jordarter har påviseligt anisotrope egenskaber, til gengæld er de ikke homogene.

På trods af at aflejringssmåden således skulle betyde, at jordens egenskaber i forskellige retninger skulle være meget forskellige, er det geoteknisk tradition at betragte jorden som isotrop. Det vil da også normalt blive gjort i den følgende fremstilling af de geotekniske brudproblemer.

3.3 Jordens kræfter

De på jordens overflade virkende kræfter er tyngdekraften og jordens egen vægt. Tyngdekraften virker lodret nedad, mens jordens egen vægt virker lodret nedad i alle retninger. På grund af jordens egen vægt virker der på jordens overflade en vandret kraft, som kaldes jordens egen vægt. Denne kraft virker på jordens overflade og er den årsag til, at jordens overflade er vandret.

Statiske forhold

3.1 Ydre kræfter

De ydre kræfter, der påvirker en jordmasse kan deles i to kategorier:

Overfladekræfter eller kontaktkræfter, der virker på jordmassens overflade. Det kan fx være belastning fra et fundament.

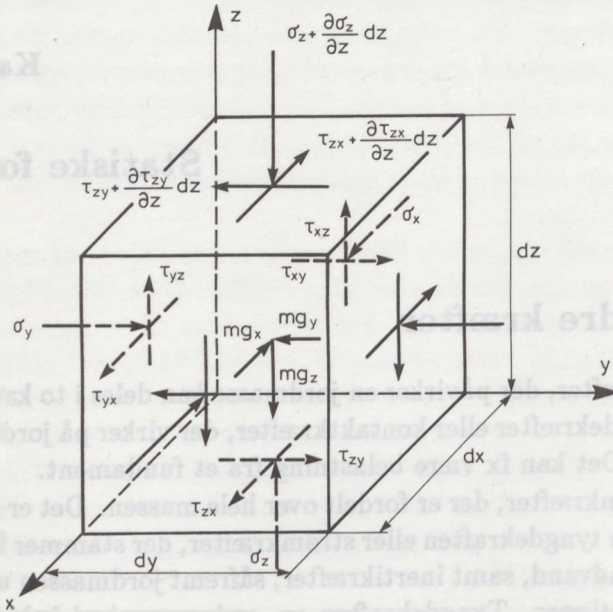
Volumenkræfter, der er fordelt over hele massen. Det er sådanne kræfter som tyngdekraften eller strømkræfter, der stammer fra strømmende grundvand, samt inertikræfter, såfremt jordmassen udsættes for accelerationer. Tyngdekraften pr. volumenenhed kaldes i geoteknisk sprogbrug for rumvægten γ .

Såfremt de ydre kræfter er i ligevægt, vil den betragtede jordmasse være i ro og uden inertikræfter. I denne bog vil udelukkende blive behandlet sådanne statiske forhold.

3.2 Indre kræfter

De ydre kræfter forplanter sig gennem kornskelettet eller porevandet på en måde, der afhænger stærkt af jordens struktur. Der opstår således store kontaktryk, hvor kornene støder sammen. På grund af den manglende eller ringe sammenhæng mellem de enkelte korn, vil knusning af kornene dog sjældent udgøre et problem, fordi jorden

da allerede har undergået store ændringer. Derfor indføres spændingsbegrebet på sædvanlig vis, idet jordmassen betragtes som et kontinuum.



Figur 3.1: Ligevægt af infinitesimalt legeme.

Spændingerne regnes positive som tryk, og der skelnes mellem de totale spændinger σ , der kan opdeles i de effektive spændinger σ' og poretrykkene eller de neutrale spændinger u :

$$\sigma = \sigma' + u \quad (3.1)$$

3.3 Ligevægt

Der betragtes først spændingsændringerne mellem to nærtliggende punkter i en jordmasse. På figur 3.1 ses udkåret et retvinklet

prisme med sidelængderne dx, dy og dz og koordinatsystemet er valgt således, at tyngdekraften virker modsat z -aksen.

Da terningen også kan være påvirket af strømkræfter, er den samlede volumenkraft på terningen:

$$m\bar{g} = [mg_x, mg_y, mg_z]$$

På den underste snitflade, der har z -aksen som normal, virker spændingen

$$\bar{p}_z = [\tau_{zx}, \tau_{zy}, \sigma_z]$$

på den øverste snitflade virker spændingen

$$\begin{aligned} \bar{p}_z + d\bar{p}_z &= \left[\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \cdot dz, \tau_{zy} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \cdot dz, \sigma_z + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \cdot dz \right] \end{aligned}$$

Forholdene i de øvrige snitflader er analoge, men ikke skrevet helt ud på figuren af pladshensyn.

Der er seks ligevægtsligninger. De tre momentligninger om akser gennem legemets tyngdepunkt viser efter bortkastning af led af højere orden, at

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad , \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} \quad , \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}$$

De tre projektligninger bliver herefter, idet $dx \cdot dy \cdot dz$ bortforkortes:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + g_x \cdot \rho &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + g_y \cdot \rho &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + g_z \cdot \rho &= 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Ved alle korrekte løsninger skal (3.2) være opfyldt i ethvert punkt i den betragtede jordmasse, uanset hvordan materialet er opbygget.

I geostatik må man før anvendelsen af (3.2) gøre sig klart, om ligningen skal anvendes i forbindelse med en spændingsanalyse i totale spændinger eller effektive spændinger.

Benyttes totale spændinger, må poretrykkene betragtes som ydre kræfter og (3.2) simplificeres til:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \gamma &= 0\end{aligned}\tag{3.3}$$

Ved beregning af ændringer i spændingstilstanden ud fra in situ tilstanden, bortfalder γ -leddet, fordi det udbalanceres af in situ spændingerne.

Benyttes effektive spændinger, erindres følgende:

$$\tau' = \tau$$

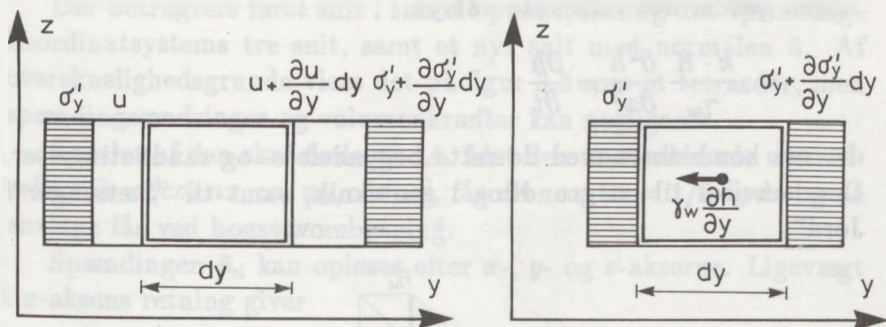
$$u = \gamma_w(h - z)$$

hvor h er trykniveauet i det betragtede punkt.

Af figur 3.2 ses, at

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = \frac{\partial \sigma'_y}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial \sigma'_y}{\partial y} + \gamma_w \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial \sigma'_y}{\partial y} + i_y \gamma_w$$

Der gælder samme analoge ligninger i x -aksens retning, men det ses, at i z -aksens retning gælder



Figur 3.2: Ækvivalente normalspændinger i y -aksens retning.

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \gamma = \frac{\partial \sigma'_z}{\partial z} + \gamma + \gamma_w \left(\frac{\partial h}{\partial z} - 1 \right) = \frac{\partial \sigma'_z}{\partial z} + \gamma_w \frac{\partial h}{\partial z} + \gamma'$$

Strømkrafterne skal i dette tilfælde medregnes som volumenkræfter og rumvægten indgå med den reducerede værdi $\gamma' = \gamma - \gamma_w$

Heraf fås (3.3) i effektive spændinger.

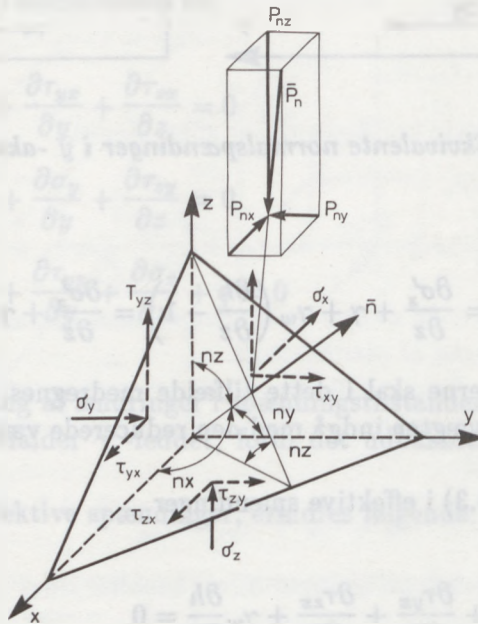
$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma'_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \gamma_w \frac{\partial h}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma'_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \gamma_w \frac{\partial h}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma'_z}{\partial z} + \gamma_w \frac{\partial h}{\partial z} + \gamma' &= 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

Såfremt der finder en konsolideringsproces sted i jorden, varierer h med tiden. For en eendimensional konsolideringsproces langs x

-aksen gælder det velkendte udtryk

$$\frac{k \cdot K}{\gamma_w} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \frac{\partial h}{\partial t}$$

der må kombineres med de rette begyndelses- og randbetingelser. Der henvises til en grundbog i geoteknik, samt til "Sætninger i Jord".



Figur 3.3: Påvirkning af skråt snit.

3.4 Kræfters transformation

Lad os herefter se, hvad der sker med spændingerne i et punkt af en jordmasse, såfremt der vælges et andet koordinatsystem end det først valgte.

Der betragtes først snit i samme punkt, nemlig det oprindelige koordinatsystems tre snit, samt et nyt snit med normalen \bar{n} . Af overskuelighedsgrunde vises det på figur 3.3 som et tetraeder, men spændingsændringer og volumenkræfter kan negligeres.

Arealet af den skrå flade er dA . Idet den normaliserede normalvektor $\bar{n} = [\cos nx, \cos ny, \cos nz]$, fås $dA \cdot \cos nz = 1/2 dy dx$ og de analoge fås ved bogstavombytning.

Spændingen \bar{p}_n kan opløses efter x -, y - og z -akserne. Ligevægt i x -aksens retning giver

$$p_{nx} dA = \frac{1}{2} \sigma_x dy dz + \frac{1}{2} \tau_{yx} dx dz + \frac{1}{2} \tau_{zx} dx dy$$

eller

$$p_{nx} = \sigma_x \cos nx + \tau_{yx} \cos ny + \tau_{zx} \cos nz$$

Alle tre ligevægtsligninger giver

$$\begin{bmatrix} p_{nx} \\ p_{ny} \\ p_{nz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos nx \\ \cos ny \\ \cos nz \end{bmatrix}$$

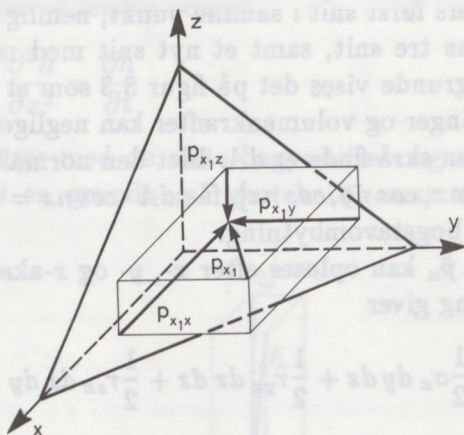
eller

$$\bar{p}_n = \bar{S} \bar{n} \quad (3.5)$$

\bar{S} er den såkaldte spændingstensor, der er knyttet til det givne ortogonale snitsystem (x, y, z) . Da $\tau_{ij} = \tau_{ji}$ er \bar{S} symmetrisk.

Formlen kan benyttes på jordmassens rand og udgør da en randbetingelse.

I fig. 3.4 betragtes et nyt ortogonalt snitsystem (x_1, y_1, z_1) . Den skrå flade har x_1 -aksen som normal og påvirkes af spændingen $\bar{p}_{x_1} = [p_{x_1x}, p_{x_1y}, p_{x_1z}]$.



Figur 3.4: Transformation af kræfter.

Retningscosinusserne kan opskrives

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{y}_1 \\ \bar{z}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos x_1x & \cos x_1y & \cos x_1z \\ \cos y_1x & \cos y_1y & \cos y_1z \\ \cos z_1x & \cos z_1y & \cos z_1z \end{bmatrix}$$

Af formel (3.5) fås nu

$$\bar{p}_{x_1} = \bar{S} \bar{x}_1$$

Normalspændingen på snittet fås ved at prikke normalvektoren med \bar{p}_{x_1} :

$$\sigma_{x_1} = \bar{x}_1^T \cdot \bar{S} \bar{x}_1$$

og tilsvarende fremgangsmåde giver $\tau_{x_1y_1}$ og $\tau_{x_1z_1}$:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{x_1} \\ \tau_{x_1 y_1} \\ \tau_{x_1 z_1} \end{bmatrix} = \bar{\bar{A}} \cdot \bar{p}_{x_1} = \bar{\bar{A}} \bar{\bar{S}} \bar{x}_1 \quad (3.6)$$

Gentages beregningen for de to andre snit med normalerne y_1 og z_1 fås:

$$\bar{\bar{S}}_1 = \bar{\bar{A}} \bar{\bar{S}} \bar{\bar{A}}^T \quad (3.7)$$

3.5 Hovedspændingssnit

(x_1, y_1, z_1) - koordinatsystemet roteres nu, indtil $\bar{p}_{x_1}, \bar{p}_{y_1}, \bar{p}_{z_1}$ peger i de respektive normalers retning, hvor følgende betingelse skal være opfyldt

$$\bar{\bar{S}}_1 = \bar{\bar{A}} \bar{\bar{S}} \bar{\bar{A}}^T = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

Da $\bar{\bar{A}}$ er ortogonal, er $\bar{\bar{A}}^T = \bar{\bar{A}}^{-1}$, idet både $\bar{\bar{A}}, \bar{\bar{S}}_1$ og $\bar{\bar{S}}$ er symmetriske, fås:

$$\bar{\bar{S}} \bar{\bar{A}}^T = \bar{\bar{A}} \bar{\bar{S}}_1 = \bar{\bar{S}}_1 \bar{\bar{A}}$$

eller

$$(\bar{\bar{S}} - \bar{\bar{S}}_1) \bar{\bar{A}}^T = 0 \quad (3.8)$$

der indeholder 9 ligninger, som på grund af symmetrien bestemmer σ_1, σ_2 og σ_3 samt retningscosinusserne i $\bar{\bar{A}}$.

Problemet er det velkendte egenværdiproblem, der foruden den trivielle løsning $\bar{\bar{A}}^T = 0$, har løsninger såfremt $|\bar{\bar{S}} - \bar{\bar{S}}_1| = 0$, eller såfremt

$$\sigma_i^3 - I_1 \cdot \sigma_i^2 + I_2 \sigma_i - I_3 = 0 \quad (3.9)$$

hvori σ_1, σ_2 og σ_3 er rødder.

De tre størrelser I_1, I_2 og I_3 er uafhængige af koordinataksernes drejning og kaldes derfor invarianter. De findes at være:

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \\ I_2 &= \sigma_z \sigma_x + \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z - \tau_{zx}^2 - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 \\ I_3 &= |S| \end{aligned} \quad (3.10)$$

Ligning (3.9) kan også udledes på en anden måde. Der søges en sådan vektor \bar{r}_i , at den resulterende spænding \bar{p}_i er en normalspænding:

$$\bar{p}_i = \bar{\bar{S}} \bar{r}_i = \sigma_i \bar{r}_i$$

der ses at give betingelsen

$$(\bar{\bar{S}} - \sigma_i \bar{\bar{E}}) \cdot \bar{r}_i = 0$$

Ligningen har foruden den trivielle løsning $\bar{r}_i = 0$, løsninger såfremt

$$|\bar{\bar{S}} - \sigma_i \bar{\bar{E}}| = 0$$

der igen fører til ligning (3.9).

EKSEMPEL 3.1.

Givet spændingerne på de tre flader $x = 0$, $y = 0$ og $z = 0$.

$$\bar{S} = \begin{bmatrix} 13 & 2 & 4 \\ 2 & 10 & 2 \\ 4 & 2 & 13 \end{bmatrix}$$

Bestem hovedspændingerne.

Invarianterne fås af (3.10):

$$I_1 = 36 \quad , \quad I_2 = 405 \quad \text{og} \quad I_3 = 1458$$

og den karakteristiske ligning (3.9)

$$\sigma_i^3 - 36\sigma_i^2 + 405\sigma_i - 1458 = 0$$

der ses at have rødderne 9, 9 og 18.

Altså er hovedspændingerne

$$\sigma_1 = 18 \quad , \quad \sigma_2 = 9 \quad \text{og} \quad \sigma_3 = 9$$

De tilsvarende enhedsvektorer r_i findes af (3.8), idet der dog på grund af dobbeltroden kun bliver to ligningssystemer.

For $\sigma_1 = 18$ fås

$$\begin{bmatrix} -5 & 2 & 4 \\ 2 & -8 & 2 \\ 4 & 2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos r_1 x \\ \cos r_1 y \\ \cos r_1 z \end{bmatrix} = \bar{0}$$

Efter rækkeoperationer og normering fås

$$\bar{r}_1^T = \left[\frac{2}{3} \quad , \quad \frac{1}{3} \quad , \quad \frac{2}{3} \right]$$

for $\sigma_2 = 9$ fås

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos r_2 x \\ \cos r_2 y \\ \cos r_2 z \end{bmatrix} = \bar{0}$$

altså een ligning

$$2 \cos r_2 x + \cos r_2 y + 2 \cos r_2 z = 0$$

Vælges $\cos r_2 x = \frac{1}{3}$ og opfyldes normalitetskravet fås

$$\bar{r}_2^T = \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3} \right]$$

Den anden løsning kræver at $\bar{r}_2^T \cdot \bar{r}_3 = 0$.

Herved fås

$$\bar{r}_3^T = \left[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right]$$

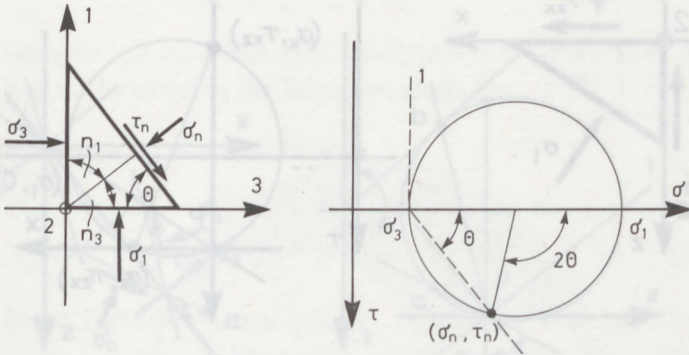
3.6 Mohrs cirkler

Plan spændingstilstand

Den plane spændingstilstand fremkommer, såfremt een af koordinataksene er sammenfaldende med en af hovedsnitsnormalerne. Lad fx n_2 være 90° , altså $\cos n_2 = 0$, således at det betragtede snit er parallelt med 2 akser (se figur 3.5).

Normalspændingen σ_n findes af (3.6), idet $n_1 = \theta$ og $n_3 = 90 - \theta$ indsættes:

$$\sigma_n = \sigma_1 \cos^2 \theta + \sigma_3 \sin^2 \theta$$



Figur 3.5: Mohrs cirkel for spændinger.

Idet det erindres, at $2\cos^2\theta = 1 + \cos 2\theta$ og $2\sin^2\theta = 1 - \cos 2\theta$, indses det at være lig med

$$\sigma_n = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cos 2\theta \quad (3.11)$$

Den samlede spænding p_n på snittet fås af (3.5):

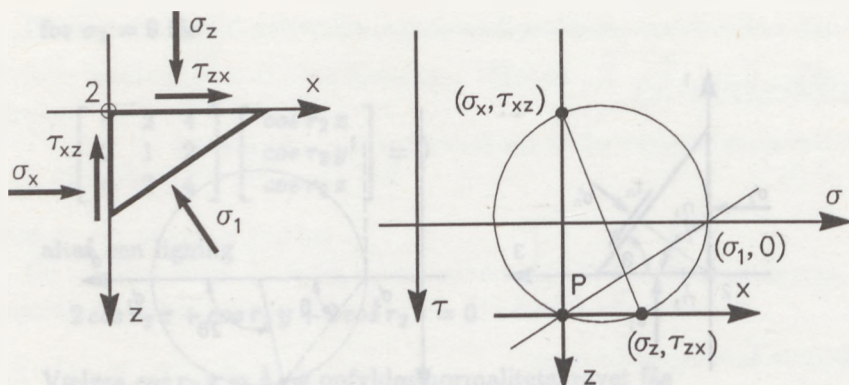
$$p_n^2 = \sigma_1^2 \cos^2 n_1 + \sigma_3^2 \cos^2 n_3$$

Forskydningsspændingen τ_n findes af

$$\tau_n^2 = p_n^2 - \sigma_n^2$$

der efter nogen regning ses at være

$$\tau_n = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin 2\theta \quad (3.12)$$



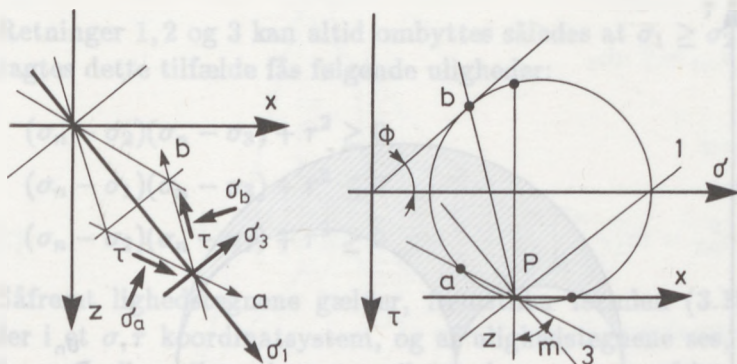
Figur 3.6: Snitretninger.

Ligningerne (3.11) og (3.12) kan tolkes ved hjælp af Mohrs cirkler således som vist i figur 3.5. Mohrs cirkel fremstiller således spændingsforholdene i et punkt. Radiusvektors drejning er dobbelt så stor som snittets drejning.

Såfremt man ønsker at have en fast fortegnsgenregning for τ , kan den regnes positiv, når den har samme retning som σ_n drejet mod uret. τ -aksen bliver nedadrettet og $\tau_{xy} = -\tau_{yx}$. Betragtes en elementarfirkant løber τ da med uret, men skifter fortegn hver gang et hjørne passerer.

På figur 3.6 ses det generelle plane tilfælde, hvor x - og z -akserne ikke er hovedspændingsretninger, og hvor det da gælder om at finde disse retninger. τ er vist positiv ifølge fortegnsgenregningen. Radiusvektors drejning er som omtalt det dobbelte af snitdrejningen, medens en sekant, der går igennem et bestemt punkt P (en pol) på periferien af cirklen, drejes nøjagtig som snittet. Man kan derfor vælge P 's beliggenhed således, at sekanten gennem P og spændingspunktet (σ_z, τ_{zx}) angiver den snitretning, som σ_z og τ_{zx} virker på.

Det bemærkes først at det snit, der følger x -aksen, har positiv

Figur 3.7: *a- og b-linier.*

τ . Spændingspunktet ligger under σ -aksen. Da x -aksen er vandret, tegnes en vandret sekant, hvis andet skæringspunkt er polen P . Eller man kan gå ud fra snitretningen parallelt med z -aksen, og det giver heldigvis det samme. Den snitretning, hvorpå største hovedspænding virker, konstrueres herefter let (se fig. 3.6).

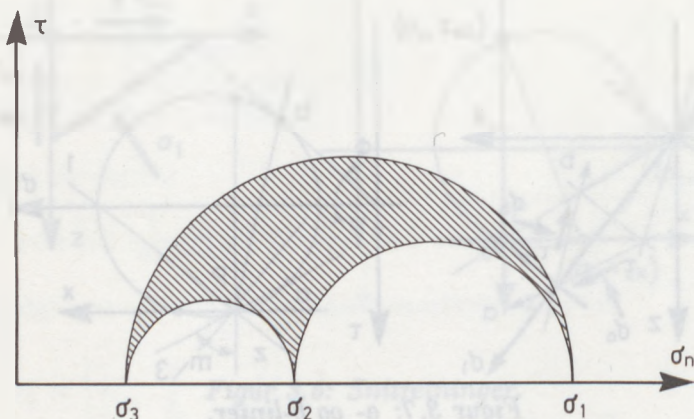
Kendes snitkræfterne i to andre retninger, a og b (figur 3.7, der ligger vinklen $45 \pm \frac{\phi}{2}$ fra et hovedsnit, ses det, at største hovedspænding har en retning, der halverer den spidse vinkel mellem a og b .

Det bemærkes til slut, at Mohrs cirkel for spændinger er et grafisk hjælpemiddel, der kan benyttes såfremt ligevægt er opfyldt.

Rumlige spændingstilstand

Den rumlige spændingstilstand kan også afbildes ved Mohrs cirkler (fig. 3.8).

Idet \bar{S} betegner spændingstensen svarende til hovedspændingsretningerne 1, 2 og 3, fås normalspændingen i en plan med normalen



Figur 3.8: Mohrs cirkler

\bar{n} af formel (3.6):

$$\bar{\sigma}_n = \bar{n}^T \cdot \bar{\bar{S}} \cdot \bar{n} \quad (3.13)$$

$$= \sigma_1 \cos^2(n1) + \sigma_2 \cos^2(n2) + \sigma_3 \cos^2(n3) \quad (3.14)$$

medens den samlede kraft p_n fås af (3.5):

$$p_n = \bar{n}^T \cdot \bar{\bar{S}}^T \cdot \bar{\bar{S}} \cdot \bar{n} \quad (3.15)$$

$$= \sigma_1^2 \cos^2(n1) + \sigma_2^2 \cos^2(n2) + \sigma_3^2 \cos^2(n3) \quad (3.16)$$

og idet retningscosinusernes kvadratsum er 1, fås efter nogen regning:

$$\cos^2(n1) = \frac{\tau^2 + (\sigma_n - \sigma_3)(\sigma_n - \sigma_2)}{(\sigma_1 - \sigma_3)(\sigma_1 - \sigma_2)}$$

$$\cos^2(n2) = \frac{\tau^2 + (\sigma_n - \sigma_1)(\sigma_n - \sigma_3)}{(\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_1)} \quad (3.17)$$

$$\cos^2(n3) = \frac{\tau^2 + (\sigma_n - \sigma_2)(\sigma_n - \sigma_1)}{(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2)}$$

Retninger 1, 2 og 3 kan altid ombyttes således at $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$.
Betragtes dette tilfælde fås følgende uligheder:

$$\begin{aligned} (\sigma_n - \sigma_2)(\sigma_n - \sigma_3) + \tau^2 &\geq 0 \\ (\sigma_n - \sigma_1)(\sigma_n - \sigma_3) + \tau^2 &\leq 0 \\ (\sigma_n - \sigma_2)(\sigma_n - \sigma_1) + \tau^2 &\geq 0 \end{aligned} \quad (3.18)$$

Såfremt lighedstegnene gælder, fremstiller formlen (3.18) tre cirkler i et σ, τ koordinatsystem, og af ulighedstegnene ses, at de mulige spændingstilstande svarer til det skraverede område.

3.7 Oktaederplanet

Ud fra et tilfældigt valgt koordinatsystem er vi nu i stand til at finde det koordinatsystem, hvis akser er hovedspændingsretninger. Enhedsvektorerne for dette system kaldes i det følgende for \bar{i}, \bar{j} og \bar{k} . Spændingstensoren S_i er altså

$$\bar{S}_i = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

Der findes otte retninger med numerisk ens retningscosinusser, nemlig alle kombinationer af $(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \frac{1}{\sqrt{3}})$. (Fordi $\bar{m} \cdot \bar{m}^T = 1$)

Den plan, der har normalen

$$\bar{m}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

kaldes for oktaederplanet (figur 3.9). Den resulterende spænding \bar{p}_{oct} er i følge (3.5)

$$\bar{p}_{oct} = \bar{S} \cdot \bar{m}_1$$

der giver

$$p_{oct}^2 = \bar{m}_1^T \cdot \bar{S}^T \cdot \bar{S} \cdot \bar{m}_1 = \frac{1}{3} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) \quad (3.20)$$

Normalspændingen findes af

$$\sigma_{oct} = \bar{m}_1^T \cdot \bar{S} \cdot \bar{m}_1 = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1}{3} I_1 = \sigma_m \quad (3.21)$$

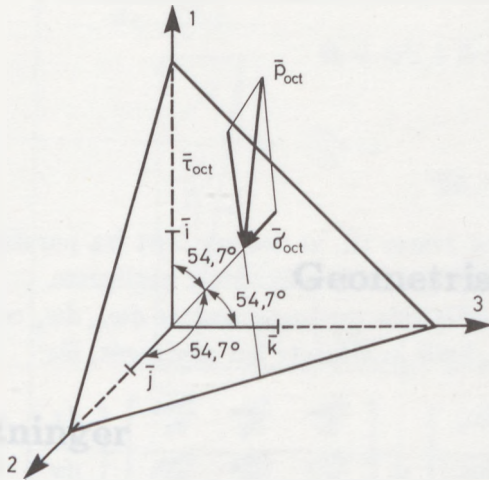
Normalspændingen σ_{oct} på oktaederplanet er altså lig med midlspændingen σ_m .

Den tilhørende forskydningspænding τ_{oct} er resultatanten af de τ 'er, der virker på snittet. τ_{oct} findes ved nogen regning af:

$$\begin{aligned} \tau_{oct}^2 &= p_m^2 - \sigma_m^2 \\ &= \frac{1}{9} \left((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right) \\ &= \frac{2}{9} (I_1^2 - 3I_2) \end{aligned} \quad (3.22)$$

Oktaederspændingerne og oktaederplanet er særlig nyttigt for et rent friktionsmateriale, fordi brudbetingelsen herved fremstår som en lukket kurve med samme forholdsvise placering i oktaederplanet.

Også ved beregning af tøjningstilstande går man ud fra oktaederplanet, men af hensyn til forsøgsapparaterne modificeres spændinger og tøjninger. Se "Sætninger i Jord" afsnit 3.2.



Figur 3.9: Oktaederplanet



Figur 4.1: Deformation af legeme

En kugle af stål, der betragtes som en kugle af stål, der er under tryk, vil blive deformeret til en ellipsoide. Af disse overflader, der betragtes som en kugle af stål, vil blive deformeret til en ellipsoide.

Indsæt i (1.2) og (1.3) og brug (1.4) og (1.5) til at udlede følgende:

$$k_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

og giver

$$k_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})\bar{x} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \bar{x}^2 \quad (1.6)$$

Hermed følger følgende:

$$k_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 + \bar{x} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) + \bar{x}^2 \sum_{i=1}^n 1 \quad (1.7)$$

Hermed følger følgende:

Hermed følger følgende:

Hermed følger følgende:

$$\begin{aligned} k_2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 + \bar{x} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) + \bar{x}^2 \sum_{i=1}^n 1 \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 + \bar{x} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) + \bar{x}^2 \sum_{i=1}^n 1 \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 + \bar{x} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) + \bar{x}^2 \sum_{i=1}^n 1 \end{aligned} \quad (1.8)$$

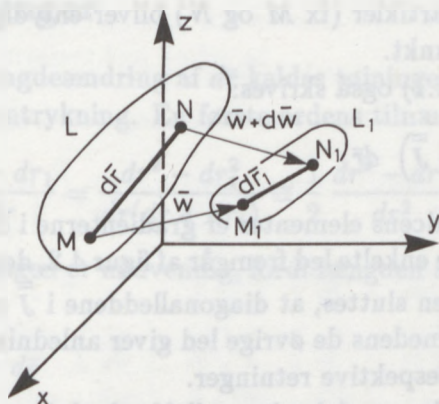
Hermed følger følgende:

Hermed følger følgende:

Geometriske forhold

4.1 Flytninger

Et legeme tænkes flyttet og deformeret. På figur 4.1 ses et dellegeme L , som ved en flytning og deformation er ført over i dellegemet L_1 .



Figur 4.1: Deformation af legeme.

Et liniestykke $d\vec{r}$, der forbinder to punkter M og N , føres derved over i $d\vec{r}_1$. M føres over i M_1 ved flytningsvektoren \vec{w} , N i N_1 ved

flytningsvektoren $\bar{w} + d\bar{w}$. Man har umiddelbart

$$\bar{w} + d\bar{r}_1 = \bar{w} + d\bar{w} + d\bar{r}$$

eller

$$d\bar{r}_1 = d\bar{r} + d\bar{w} \quad (4.1)$$

Sidste ligning svarer til, at der ses bort fra parallelforskydning, hvad der er tilladeligt, da inertikræfter negligeres.

$d\bar{w}$ opdeles først i de tre komponenter dw_x , dw_y og dw_z . Ved en rækkeudvikling, hvor kun første led medtages, fås:

$$d\bar{w} = \begin{bmatrix} dw_x \\ dw_y \\ dw_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial w_x}{\partial x} & \frac{\partial w_x}{\partial y} & \frac{\partial w_x}{\partial z} \\ \frac{\partial w_y}{\partial x} & \frac{\partial w_y}{\partial y} & \frac{\partial w_y}{\partial z} \\ \frac{\partial w_z}{\partial x} & \frac{\partial w_z}{\partial y} & \frac{\partial w_z}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} = \bar{\bar{J}} \cdot d\bar{r} \quad (4.2)$$

$\bar{\bar{J}}$ kaldes flytningsmatricen. Ved at forlange $|J| \neq 0$ sikres, at afbildningen af partikler (fx M og N) bliver entydig i en omegn af det betragtede punkt.

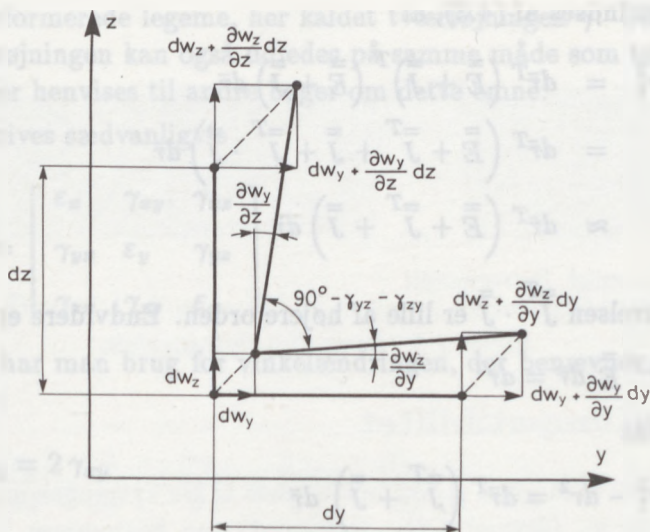
Herved kan (4.1) også skrives:

$$d\bar{r}_1 = (\bar{\bar{E}} + \bar{\bar{J}}) d\bar{r} \quad (4.3)$$

Flytningsmatricens elementer er gradienterne i de tre retninger. Betydningen af de enkelte led fremgår af figur 4.2, der viser det plane tilfælde. Af figuren sluttes, at diagonalledene i $\bar{\bar{J}}$ er forlængelser i de tre retninger, medens de øvrige led giver anledning til drejninger af vektoren i de respektive retninger.

Flytningerne kan opdeles i parallelforskydning, rotation og deformation. Vi har allerede set bort fra parallelforskydning.

Som et mål for deformation benyttes relative længdeændringer, også kaldet tøjninger og relative vinkeldrejninger også kaldet forskydningstøjninger eller tværtøjninger.



Figur 4.2: Flytningsgradienter

4.2 Tøjninger

Den relative længdeændring af $d\bar{r}$ kaldes tøjningen ϵ_r og regnes positiv for sammentrykning. En første ordens tilnærmelse giver nu:

$$\epsilon_r = \frac{dr - dr_1}{dr} = \frac{dr^2 - dr_1^2}{dr(dr + dr_1)} \cong \frac{1}{2} \frac{dr^2 - dr_1^2}{dr^2} \quad (4.4)$$

hvor omskrivningen er nødvendig, fordi længden af vektoren $d\bar{r}$ findes af

$$dr^2 = d\bar{r} \cdot d\bar{r}$$

Først indses af (4.3), at

$$\begin{aligned} dr_1^2 &= d\bar{r}^T \left(\bar{\bar{E}} + \bar{\bar{J}} \right)^T \left(\bar{\bar{E}} + \bar{\bar{J}} \right) d\bar{r} \\ &= d\bar{r}^T \left(\bar{\bar{E}} + \bar{\bar{J}}^T + \bar{\bar{J}} + \bar{\bar{J}}^T \cdot \bar{\bar{J}} \right) d\bar{r} \\ &\approx d\bar{r}^T \left(\bar{\bar{E}} + \bar{\bar{J}}^T + \bar{\bar{J}} \right) d\bar{r} \end{aligned}$$

idet størrelsen $\bar{\bar{J}}^T \cdot \bar{\bar{J}}$ er lille af højere orden. Endvidere er

$$d\bar{r}^T \bar{\bar{E}} d\bar{r} = dr^2$$

herved fås

$$dr_1^2 - dr^2 = d\bar{r}^T \left(\bar{\bar{J}}^T + \bar{\bar{J}} \right) d\bar{r}$$

eller ved indsættelse i (4.4)

$$\varepsilon_r = \frac{1}{2} \frac{d\bar{r}^T}{dr} \left(-\bar{\bar{J}}^T - \bar{\bar{J}} \right) \frac{d\bar{r}}{dr} = \bar{n}^T \bar{\bar{D}} \bar{n} \quad (4.5)$$

idet der er indført enhedsvektoren \bar{n} og tøjningsmatricen $\bar{\bar{D}}$.

$\bar{\bar{D}}$ kan påvises at være en tensor, tøjningstensoren. $\bar{\bar{D}}$ er åbenbart symmetrisk.

$$\bar{\bar{D}} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial w_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_x}{\partial y} + \frac{\partial w_y}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_x}{\partial z} + \frac{\partial w_z}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_x}{\partial y} + \frac{\partial w_y}{\partial x} \right) & \frac{\partial w_y}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_y}{\partial z} + \frac{\partial w_z}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_x}{\partial z} + \frac{\partial w_z}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_y}{\partial z} + \frac{\partial w_z}{\partial y} \right) & \frac{\partial w_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Af figur (4.2) ses, at diagonalledene er tøjningerne i de respektive retninger. Det kan også indses af formel (4.5), fx ved at indsætte enhedsvektoren for x-aksen $\bar{n} = (1, 0, 0)$ fås $\varepsilon_x = -\partial w_x / \partial x$.

Af figur 4.2 ses endvidere, at leddene uden for diagonalen er halvdelen af ændringen af den rette vinkel mellem koordinataksene

i det udeformerede legeme, her kaldet tværtøjningen γ . Udtrykket for tværtøjningen kan også udledes på samme måde som tøjningen ϵ , men her henvises til andre bøger om dette emne.

\bar{D} skrives sædvanligvis

$$\bar{D} = \begin{bmatrix} \epsilon_x & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{yx} & \epsilon_y & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \gamma_{zy} & \epsilon_z \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

Ofte har man brug for vinkelændringen, der benævnes φ_{xy} (og analoge):

$$\varphi_{xy} = 2\gamma_{xy} \quad (4.7)$$

4.3 Rotation

Flytningsmatricen \bar{J} består af 9 flytningsgradienter, medens \bar{D} kun består af 6 tøjninger, nemlig forkortelser og vinkelændringer. De resterende 3 størrelser kan findes af

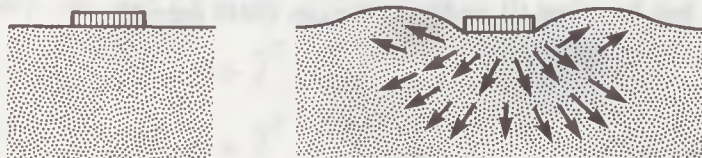
$$\bar{R} = \bar{J} + \bar{D}$$

hvor fortegnet for \bar{D} skyldes fortegnsdefinitionen.

Heraf fås

$$\bar{R} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_x}{\partial y} - \frac{\partial w_y}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_x}{\partial z} - \frac{\partial w_z}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_y}{\partial x} - \frac{\partial w_x}{\partial y} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_y}{\partial z} - \frac{\partial w_z}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_x}{\partial z} - \frac{\partial w_z}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_y}{\partial z} - \frac{\partial w_z}{\partial y} \right) & 0 \end{bmatrix}$$

\bar{R} kaldes rotationsmatricen. Den svarer til \bar{J} , såfremt $\bar{D} = 0$, og fremstiller da en stiv rotation. De enkelte led svarer til rotationen om de respektive akser.



Eentydigt flytningsfelt

Figur 4.3: Eentydigt flytningsfelt.

4.4 Kompatibilitet

Flytningen af et givet punkt bestemmes af tre flytningskomponenter w_x, w_y og w_z (formel 4.2). Deformationen bestemmes imidlertid ved seks tøjningskomponenter (formel 4.6), og de må derfor være indbyrdes afhængige. Det indses da også let at

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = -\frac{\partial^3 w_x}{\partial x \partial y^2}$$

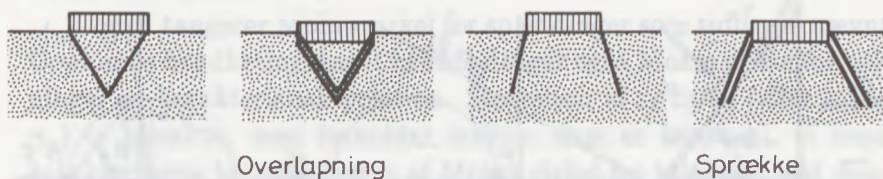
$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = -\frac{\partial^3 w_y}{\partial y \partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^3 w_x}{\partial x \partial y^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^3 w_y}{\partial y \partial x^2}$$

hvoraf fås

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = 2 \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (4.8)$$

hvertil kommer to analoge. Hertil kommer yderligere tre analoge ligninger, hvoraf den ene lyder



Figur 4.4: Kompatibilitetsbetingelse ikke opfyldt.

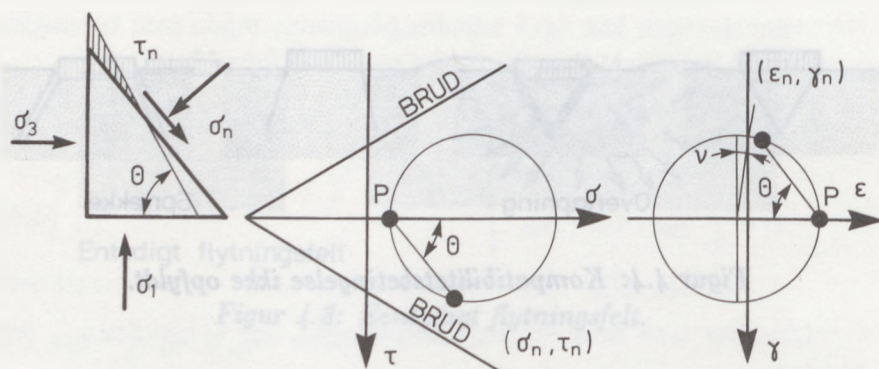
$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) \quad (4.9)$$

De seks formler i (4.8) og (4.9) udgør tilsammen kompatibilitetsbetingelsen. Flytningsfeltet skal altså være 3 gange differentiabelt for at betingelsen kan være opfyldt, og tøjningskomponenterne skal være to gange differentiable.

Såfremt kompatibilitetsbetingelsen er opfyldt, kan det vises at svare til, at flytningen er eentydig (figur 4.3). Såfremt den ikke er opfyldt, kan opstå sprækker eller overlapninger (figur 4.4).

4.5 Analogier til spændinger

Ved et nøjere studium af første ordens teorien for tøjninger kan indsnes, at der er fuldstændig analogi mellem tøjninger og spændinger, således at forkortelser ε svarer til normalspændinger σ i samme retning, og γ 'er svarer til τ 'er. Det kan sandsynliggøres ved at sammenligne ligning (4.5) med (3.6) og ved at sammenligne spændings-tensoren $\underline{\underline{S}}$ med tøjningstensoren $\underline{\underline{D}}$. De formler, der er opstillet i kapitel 3, kan derfor umiddelbart benyttes her.



Figur 4.5: Mohrs cirkler for spændingspåvirket jordelement.

Såfremt koordinatsystemet (x, y, z) transformeres over i koordinatsystemet (x_1, y_1, z_1) transformeres $\bar{\bar{D}}$ over i $\bar{\bar{D}}_1$ efter formlen

$$\bar{\bar{D}}_1 = \bar{\bar{A}} \bar{\bar{D}} \bar{\bar{A}}^T \quad (4.10)$$

idet $\bar{\bar{A}}$ indeholder retningscosinusserne til x_1, y_1 og z_1 (se afsnit 3.4).

Derfor kan også bestemmes hovedsnitsretninger, hvori der kun forekommer tøjninger men ikke vinkelændringer, og hovedsnitsretningerne står vinkelret på hinanden.

4.6 Mohrs cirkel for tøjninger

På grund af analogien med spændinger, kan også tøjningerne fremstilles ved Mohrs cirkler og polkonstruktionen kan anvendes.

På figur 4.5 ses det velkendte delement og polen P for spændinger. Men nu er også elementets tøjninger angivet, idet det deformerede legeme er angivet med tyk streg. På Mohrs cirkel for tøjninger ses polen at være forskudt 180° i forhold til polen for spændinger. Det skyldes, at σ_n er normalspændingen på snittet, medens ϵ_n er

forkortelsen af normalen til snittet. γ_n regnes positiv, når snittet drejes med uret.

I brud tangerer Mohrs cirkel for spændinger som tidligere nævnt Coulombs brudbetingelse. I brud indtager også Mohrs cirkel for tøjninger en karakteristisk position. Størrelsen af ε_1 og ε_3 (eller ε_n og γ_n) er ukendte, men forholdet mellem dem er konstant. I brud karakteriseres beliggenheden af Mohrs cirkel for tøjninger ved dilatationsvinklen ν (figur 4.5). Vinklen er positiv, når ε_3 numerisk er større end ε_1 . Det betyder nemlig, at jorden udvider sig (dilaterer) i brud. I udrænet tilstand er $\nu = 0$, i drænet tilstand er ν ca. halvdelen af φ .

For god ordens skyld bemærkes, at ν intet har at gøre med Poissons forhold μ , som anvendes i elasticitetsteorien.

4.7 Oktaederplanet

Oktaederplanet orienteres i forhold til hovedsnitsretningerne, hvis tøjningstensor er

$$\bar{\bar{D}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix}$$

Oktaederplanet's enhedsnormal i det tilsvarende koordinatsystem er $\bar{m}_1 = 1/\sqrt{3}(1,1,1)$ og forkortelsen i \bar{m}_1 's retning fås af (4.5):

$$\varepsilon_{oct} = \bar{m}_1^T \cdot \bar{\bar{D}} \cdot \bar{m}_1 = \frac{1}{3}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) = \frac{1}{3}\varepsilon_v \quad (4.11)$$

hvor ε_v er volumenændringen (første ordens tilnærmelse). I det udrænedede tilfælde er $\varepsilon_{oct} = 0$.

Foruden forkortelse ε_{oct} forekommer også tværtøjninger. Længden af tøjningsvektoren v_D findes af formel (3.20)'s analoge udtryk

$$v_D^2 = \bar{m}_1^T \cdot \bar{D}^T \cdot \bar{D} \cdot \bar{m}_1 = \frac{1}{3} (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2)$$

hvorefter tværtøjningen γ_{oct} findes af $\gamma_{oct}^2 + \varepsilon_{oct}^2 = v_D^2$

$$\gamma_{oct}^2 = \frac{1}{9} ((\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2)$$

Såfremt der ønskes beregnet vinkelændringen φ_{oct} bemærkes blot, at den er dobbelt så stor som γ_{oct} .

... og i det lange løb ender karaktererne ofte uden
tyde på yndige...

5.2. Laboratorieforsøg i fysik

Det er tidligere nævnt, at beviset på at rumtiden
kræver i en kvantitet karakterer, at den klatrer og er
næsten alene.
... og i det lange løb ender karaktererne ofte uden
tyde på yndige...

... og i det lange løb ender karaktererne ofte uden
tyde på yndige...

Kapitel 5

Jords styrke

5.1 Indledning

Geotekniske beregninger omfatter teoretiske undersøgelser af en konstruktions sætninger og sikkerhed mod brud. De udføres på grundlag af en undersøgelse af styrke- og tøjningsegenskaberne ved den jord, der findes på den aktuelle lokalitet. Der udføres lagfølgeboringer og optages intakte, cylindriske jordprøver. For ikke at fordyre byggeriet unødvendigt, udføres ofte kun elementære forsøg såsom vandindholdsbestemmelser, kornkurver eller konsistensgrænsemålinger.

Med disse målinger kan man skønne jordens styrke- og tøjningsegenskaber ved hjælp af formler, der er angivet i funderingsnormerne. Jordens egenskaber afhænger imidlertid ikke alene af ovennævnte størrelser, og skønsformlerne giver derfor kun de ønskede egenskaber med en vis usikkerhed. Formlerne er dog således indrettet, at beregningerne med stor sandsynlighed er på den sikre side.

Ved større byggeri eller visse jordbunds- eller grundvandsforhold kan det betale sig at udføre målinger af jords styrke- og tøjningsegenskaber. Det er sådanne målinger, der omtales i det følgende med specielt henblik på jords styrkeegenskaber.

Resultatet af forsøgene vil desuden indgå i det almindelige erfa-

ringsgrundlag og i det lange løb ændre skønsformlerne eller underbygge dem yderligere.

5.2 Laboratorieforsøg

Det er tidligere omtalt, at beregningen af spændings- og tøjningsændringer i et kontinuum forudsætter, at tre betingelser er opfyldt. De to betingelser — den statiske og den geometriske — er generelle, dvs. uafhængige af om materialet er luftformigt, flydende eller fast, det betragtede legeme skal blot være i ro.

Den sidste betingelse — den fysiske — beskriver sammenhængen mellem spændinger og tøjninger, og er derfor afhængig af materialet. Den må studeres ved laboratorieforsøg, der normalt resulterer i arbejdskurver. Kurveformen viser, at jord ikke er elastisk eller plastisk, men at der altid må påregnes krumme arbejdskurver, hysteresis og irreversibilitet.

Studiet af den fysiske betingelse foregår i laboratoriet i en række forskellige apparater, hvoraf de kendteste er konsolideringsapparatet, triaxialapparatet og skærboxapparatet, og som nyeste skud på stammen kan nævnes terningapparatet. Figur 5.1 og 5.2 viser prøvelegemerne i nogle af disse apparater, hvordan prøvelegemerne deformerer, og hvilke målinger, der foretages. På trods af at figur 5.1 og 5.2 langt fra viser alle de kendte forsøgstyper, giver det dog en ide om den opfindsomhed, hvormed måleprocessen omgærdes. De mange forskellige apparattyper giver resultater, der udviser store indbyrdes forskelle. Imidlertid kan selv en simpel analyse forkaste anvendelsen af nogle af forsøgstyperne.

Alle målinger foregår som overflademålinger, da det ikke er muligt at anbringe følere inden i prøven uden at ødelægge den. Målingerne repræsenterer således prøvens gennemsnitlige opførsel, og det er derfor nødvendigt ved studiet af den fysiske betingelse at anvende forsøgstyper, der muliggør ensartede tilstande i prøven.

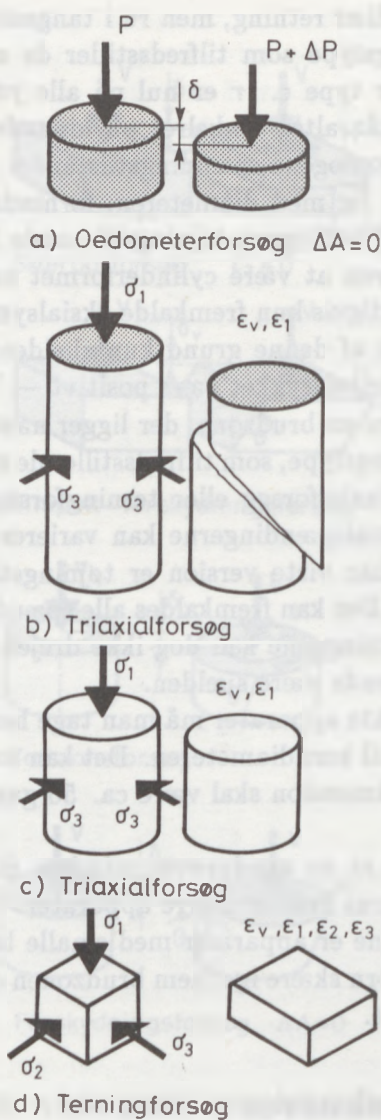
I nogle forsøgstyper, fx b og e, udvikles i brud en smal brudzone, som adskiller to stive jordlegemer. Tilstanden i prøven er ikke ensartet. I brud er det forholdene i den smalle brudzone, der bestemmer den målte arbejdskurves udseende. Da hverken bredden af eller vandindholdet i den smalle zone kendes, er det vanskeligt at bruge arbejdskurven. Specielt i "udrænedede" forsøg er fejlmuligheden stor. Der kan nemlig tilføres brudzonen vand fra de stive legemer, uden at det ændrer prøvens volumen. Sådanne forsøg er dog ikke værdiløse, således som det vil blive nævnt i afsnit 5.9, de kan blot ikke bruges til at fremstille sammenhænge mellem spændinger og tøjninger.

En række af de andre forsøgstyper er heller ikke hensigtsmæssige. Det er klart, at homogene spændings- og tøjningstilstande i hele prøven også omfatter prøvens overflade, således at det er muligt at anvende de statiske og geometriske betingelser til en yderligere undersøgelse. På figur 5.1 og 5.2 er de ru flader grå, de glatte flader er hvide.

Oedometerforsøget (der normalt kaldes konsolideringsforsøget) har konstant areal i vandret snit. Selv om de vandrette flader er ru, kan forskydningskræfter vanskeligt udvikles. Det kan de til gengæld ikke undgå på de lodrette flader, og da $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, kan spændingstilstanden ikke være homogen, hverken langs med kanten eller i prøven. Såfremt prøvens højde er lille i forhold til diameteren, indskrænkes randproblemerne. Forsøget er nævnt her for fuldstændighedens skyld. Der kan ikke optræde brud i prøven. På tilsvarende måde ses, at type b og h ikke kan give homogene tilstande.

Forsøgstype f ser umiddelbart ud til at kunne give ensartede spændingstilstande, forudsat apparatet kan mobilisere de nødvendige påvirkninger på de skrå flader. Af andre grunde, som omtales i afsnit 5.8, kan et korrekt forsøg dog ikke udføres som vist.

Forsøgstype g kan med nogen tilnærmelse betragtes som et plant forsøg, nemlig såfremt ringens tykkelse er lille i forhold til radius. Såfremt apparatet skal kunne fungere, må det ringformede trykko-



Figur 5.1: Nogle geotekniske laboratorieforsøg.

ved være glat i radiær retning, men ru i tangentiell retning.

Den ene forsøgstype som tilfredsstillende de statiske betingelser for homogenitet er type c. τ er nul på alle ydre flader. Hovedsnitsretningerne står altså vinkelret på hinanden og det er en af betingelserne for homogene spændingstilstande. Ved at anvende en prøvehøjde, der er lig med diameteren, forhindres den skrå brudflade i at opstå og homogene tøjningstilstande kan optræde. I så fald vedbliver prøven at være cylinderformet under hele forsøget. Forsøget kan naturligvis kun fremkalde aksialsymmetriske tilstande i prøven, og svarer af denne grund kun sjældent til virkeligheden. Endvidere skal stempeltrykket være positivt — "triaxialt tryk" —, da der ellers dannes en brudzone, der ligger næsten vandret.

Den anden forsøgstype, som tilfredsstillende de statiske betingelser, er det "sande" triaxialforsøg eller terningforsøget. Prøvelegemet er kubisk, og normalspændingerne kan varieres vilkårligt i de tre retninger. I den her viste version er tøjningstilstanden styret af stive trykhoveder. Der kan fremkaldes alle spændingstilstande, men hovedspændingsretningerne kan dog ikke drejes. Apparattypen vil formentlig vedblivende være sjælden.

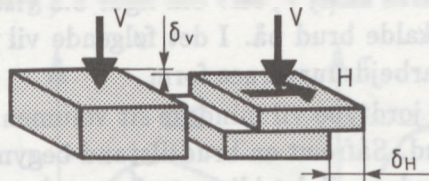
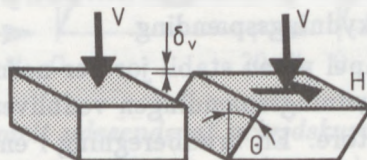
Selv med perfekte apparater må man tage hensyn til apparatets størrelse i forhold til korndiameteren. Det kan som regel antages at prøvens mindste dimension skal være ca. 50 gange middelkorndiameteren.

Det svarer til, at en sandprøves mindste dimension bør være 7-10 cm, medens grus kræver større apparater.

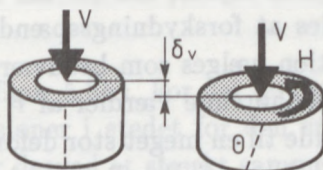
Særligt følsomme er apparater med smalle brudzoner. Her kan selv relativt små korn skære igennem brudzonen og forøge modstanden mod bevægelse.

5.3 Arbejdskurver

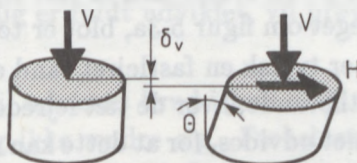
Arbejdskurven giver en sammenhæng mellem en spænding og den tilsvarende tøjning. I brudforsøg naturligvis den påtrykte spænding

e) Skærboxforsøg $\epsilon_2 = 0$ 

f) Simpelt forskydningsforsøg



g) Torsionsforsøg

h) Forskydningsforsøg $\Delta A = 0$

Figur 5.2: Andre geotekniske laboratorieforsøg.

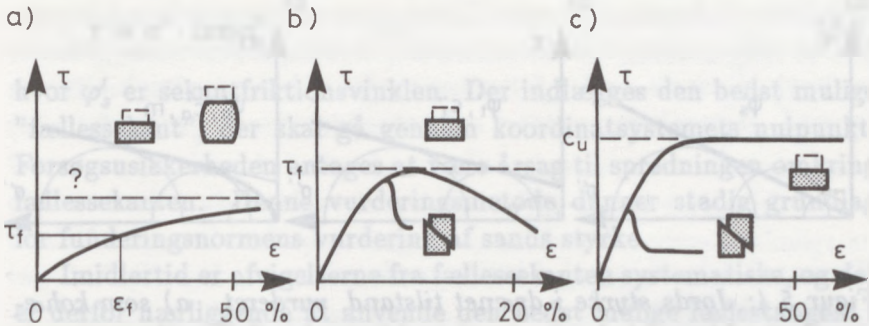
som fremkalder bruddet. Her vil denne spænding for overskuelighedens skyld blive kaldt τ , selv om figur 5.3 viser, at der er mange måder at fremkalde brud på. I det følgende vil jord blive inddelt i to typer efter arbejdskurvernes form.

Den *stabile* jordtype vil mindske sit volumen, når spændingerne nærmer sig brud. Såfremt en brudtilstand begynder at udvikle sig i et område af jorden, vil det blive styrket, og bruddet må søge andre steder hen. Brud nås i en homogen tilstand, hvor alle dele bærer næsten samme forskydningsspænding.

Et typisk eksempel på en stabil jord er normalkonsolideret ler. (Figur 5.3a.) Forskydningsspændingen vedbliver at vokse, selv om tøjningerne bliver store. En brudberegning i en sådan jord er meningsløs. Sætningerne vil næsten altid gøre et bygværk ubrugeligt, selv om der er normal sikkerhed mod brud. Ønsker man alligevel at bedømme en sådan jords styrke, må det ske ud fra et deformationskriterium, fx således at forskydningsspændingen svarende til 10% eller 15% deformation vælges som brudværdi, τ_f . Ved vingeforsøg måles ikke sammenhørende værdier af τ og ε , men blot en maksimumsværdi svarende til en meget stor deformation. Udnyttes vingestyrken (med normale partialkoefficienter), må der forventes store sætninger.

Et andet eksempel på en stabil jord er løst lejret sand, hvis arbejdskurve minder meget om figur 5.3a, blot er tøjningerne mindre.

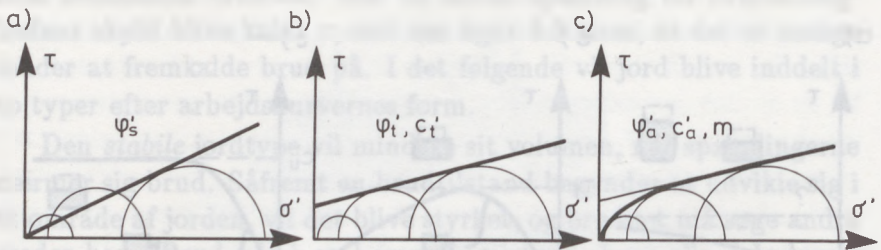
En *ustabil* jordart er typisk en fastlejret sand eller en forkonsolideret ler. Under brudtilstande, hvor de tæt lejrede korn skal passere hinanden, må volumenet udvides, for at dette kan ske. Herved svækkes det område, hvor brudtilstande først optræder, og tilgrænsende områder må bære en forøget byrde. I laboratorieforsøg, hvor bruddet tvangsstyres (type c), vil arbejdskurven udvise et relativt fladt maksimum. Det er let at definere brud som maksimumsværdien af τ og ved anvendelsen af normale partialkoefficienter vil tøjningerne blive relativt små. I laboratorieforsøg, hvor en brudflade optræder (type b og e), vil arbejdskurven få et andet udseende af to



Figur 5.3: Principielt udseende af arbejdskurver for a) Normal-konsolideret ler, meget løst lejret sand. b) Drænet forsøg med forkonsolideret ler eller sand. c) Udrænet forsøg med forkonsolideret ler.

grunde. (Se også figur 5.3b). For det første udregnes ϵ på grundlag af prøvens dimensioner i stedet for den smalle brudzones bredde. Arbejdskurven får derved et stærkt sammentrængt forløb. For det andet udvikler bruddet sig progressivt ud fra de områder, hvor brud først optræder. Her falder styrken under bruddets videre udvikling, og når brud endelig er fuldt udviklet, vil prøven i gennemsnit bære mindre.

I princippet vil udrænet brud i jord altid være stabilt. Volumenet kan jo nemlig ikke ændre sig. Forbelastet jord vil uden store deformationer nå en sluttetilstand med konstant forskydningspænding (figur 5.3c), medens normalkonsoliderede lerarter vil have en arbejdskurve, som vist i figur 5.3a. Såfremt smalle brudzoner udvikles, vil bruddet være drænet, idet vand fra tilstødende områder tilføres brudzonen, uden at det samlede vandindhold ændres. Virkningen på arbejdskurven er udtalt og har ført til, at man vurderede visse lerarters forskydningsstyrke alt for lavt.



Figur 5.4: Jords styrke i drænet tilstand, vurderet a) som kohæsløst b) med kohæslion c) med krum brudbetingelse.

5.4 Drænet tilstand

Jords styrke måles traditionelt i triaxialapparatet, og som det fremgår af forrige afsnit, kan forsøgene udføres næsten fejlfrit, såfremt prøvelegemet har en højde, der er lig med diameteren, trykhovederne er glatte og stempeltrykket positivt. På denne måde opnås homogene spændings- og tøjningstilstande, såfremt prøvelegemet var homogent ved forsøgets start.

Forsøgene må udføres passende langsomt for at give poreover- eller undertryk tid til at bortdræne. Forsøg på sand kan udføres på et par timer, men forsøg på ler kan tage uger eller måneder og må oftest opgives af denne grund.

Forsøgsresultaterne kan afbildes ved at optegne Mohrske cirkler i brudtilstanden. Cirklerne vil næsten altid ligge på den måde, der er vist i figur 5.4, nemlig således, at de cirkler, der svarer til de mindste spændinger har uforholdsmæssige store radier. På figur 5.4 a, b og c er indtegnet de samme tre cirkler, men resultatet er vurderet forskelligt.

I figur 5.4 a) vurderes materialet som et rent friktionsmateriale,

for hvilket Coulombs brudbetingelse antages at gælde:

$$\tau = \sigma' \cdot \tan \varphi'_s \quad (5.1)$$

hvor φ'_s er sekantfriktionsvinklen. Der indlægges den bedst mulige "fællessekant", der skal gå gennem koordinatsystemets nulpunkt. Forsøgsusikkerheden antages at være årsag til spredningen omkring fællessekanten. Denne vurderingsmetode danner stadig grundlag for funderingsnormens vurdering af sands styrke.

Imidlertid er afvigelserne fra fællessekanten systematiske, og det er derfor nærliggende at anvende den bedst mulige fællestangent i stedet (figur 5.4 b):

$$\tau = c'_t + \sigma' \tan \varphi'_t \quad (5.2)$$

hvor index t betyder tangent. Det er almindeligt accepteret, at forsøg på ler skal behandles på denne måde, altså at ler er i besiddelse af både effektiv kohæsion c'_t og effektiv friktion φ'_t i den drænedet tilstand.

For sand kan man bære sig ad på to måder. Enten kan man acceptere den faktisk målte kohæsion, som ikke skyldes egenskaber ved de overflader, som glider på hinanden, men derimod forskelle i volumenudvidelse på forskellige spændingsniveauer. Se afsnit 5.7. Eller man kan vurdere c'_t for sand som forsøgsfejl, kalde c'_t for "tilsyneladende", og se bort fra den. Det sidste er på den sikre side, men svarer altså ikke til observationerne.

En sammenligning mellem fig.5.4 a) og b) viser umiddelbart, at såfremt φ'_s benyttes, vil τ beregnes for stor for store spændinger, men for lille for små spændinger. Hvorvidt denne metode er på den sikre eller usikre side afhænger altså af, hvor store laboratorieforsøgets spændinger er i forhold til de faktisk optrædende spændinger. Det er altså utilfredsstillende at benytte vurdering a).

Ligning (5.2) kan også skrives:

$$\tau = (\sigma' + a) \tan \varphi'_t \quad (5.3)$$

hvor attraktionen $a = c' \cot \varphi'$. Kohæsionen kan derfor let indregnes ved blot at forøge alle spændinger med a , og derefter betragte jorden som et rent friktionsmateriale. Brudbæreevner eller passive jordtryk bliver da også a for store, medens aktive jordtryk bliver a for små. Beregningsresultatet må naturligvis korrigeres herfor.

Eksempel 5.1. N_q og N_c i bæreevneformlen.

Bæreevneformlen for et sribefundament på jordoverfladen, der er centralt og lodret belastet, kan som bekendt skrives:

$$b = \frac{1}{2} \gamma B N_\gamma + q N_q + c' N_c$$

Er jorden vægtløs ($\gamma = 0$) fås

$$b = q N_q + c' N_c$$

Hvis N_q kendes, hvor stor er da N_c ?

Ved at øge alle spændinger med $a = c' \cot \varphi'$ fås et rent friktionsmateriale. $c' N_c$ bortfalder. Der fås

$$b + c' \cot \varphi' = (q + c' \cot \varphi') N_q$$

eller

$$b = q N_q + c' \cdot (N_q - 1) \cot \varphi'$$

$$N_c = (N_q - 1) \cot \varphi'$$

der er den teoretisk korrekte værdi af N_c .

Et nøjere studium af forsøgsresultaterne vil næsten altid vise, at også en vurdering, der bygger på c_t og φ_t , indeholder systematiske afvigelser. (Se figur 5.4.c). I stedet for en fællestangent er det rimeligere at anvende en krum indhyllingskurve, der går gennem $(\sigma', \tau) = (0, 0)$. I normal praksis er det en unødvendig komplikation, men til videnskabelige formål, hvor beskrivelsen af styrkeegenskaber ønskes gjort så præcis som mulig, eller i forbindelse med modelforsøg ved små spændingsniveauer kan det være ønskeligt at tage indhyllingskurvens krumning med i regning.

Årsagen til krumningen er, at effektive spændinger i jord ikke kan blive negative, end ikke den mindste hovedspænding. Leret ville nemlig udvide sig så stærkt, at det ville miste sin sammenhæng. Hvis formel (5.2) gjaldt, ville σ_3 kunne blive negativ, når σ_1 bliver lille. En formel for indhyllingskurven skal derfor udtrykke τ ved σ'_{min} . Desuden må den være identisk med formel (5.2) for $c' = 0$ og identisk med formel (5.3) for spændingerne gående mod uendelig.

Ved omskrivning af formel (5.3) fås ifølge appendix:

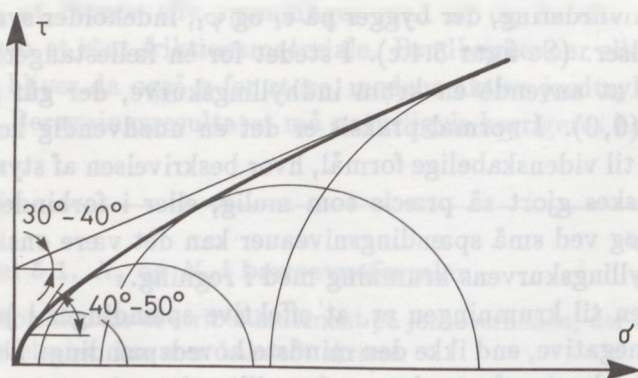
$$\tau_r = \frac{\sin\varphi'}{1 - \sin\varphi'} (\sigma'_{min} + a) \quad (5.4)$$

der gælder for en fællestangent.

Det analoge udtryk for den krumme indhyllingskurve kan skrives

$$\tau_r = \frac{\sin\varphi'_a}{1 - \sin\varphi'_a} \sigma'_{min} \left(1 + \frac{a_a}{m\sigma'_{min}} \right)^m \quad (5.5)$$

Her er indført en ekstra parameter m , der beskriver krumningen. Index a betyder asymptoteværdien af φ' og c' , altså værdien ved høje spændinger. Erkendelsen af den krumme indhyllingskurve skyldes de Beer (1963), medens formel (5.5) er opstillet af Jacobsen (1970). Det ses, at ovennævnte betingelser er opfyldt. Desuden ses det, at attraktionen mister sin betydning, hvis krumningsparameteren bliver nul. Krumningen og dermed kohæsionen er begge udtryk for, at jorden er så fastlejret, at den udvider sig i brud. Den findes



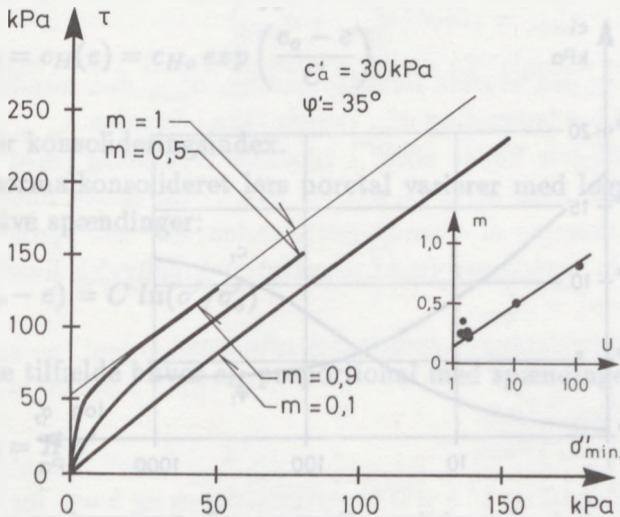
Figur 5.5: Spændingsniveauets indflydelse

derfor både for sand og ler, omend den er størst for ler. Formel (5.5) viser også, at en effektiv kohæsion ikke betyder, at jorden kan optage effektive trækspændinger.

Den krumme brudbetingelse er meget vanskelig at anvende i teoretiske brudberegninger. Det kan kun lade sig gøre i statisk bestemte brud, som omtales i kapitel 10, og det er kun gjort i et enkelt tilfælde, Jacobsen (1979). Ellers benytter man bedst formel (5.3) i forbindelse med tangenten til indhyllingskurven for et relevant spændingsniveau. Figur 5.5 viser et eksempel. Fundamenter har i praksis et relativt stort spændingsniveau og φ'_t ligger typisk mellem 30 og 40 grader. Modelforsøg i marken udføres som pladebelastningsforsøg med meget små spændingsniveauer, hvor φ'_t typisk ligger mellem 40 og 50 grader. Overføres resultaterne fra disse pladebelastningsforsøg direkte til rigtige fundamenter, overvurderes bæreevnen meget.

Betydningen af krumningsparameteren m fremgår af figur 5.6. Her ses med tynd streg Coulombs brudbetingelse, der er asymptote til indhyllingskurven og som svarer til $m = 1$. Med tyk streg er

vist kurver med forskellige værdier af m . $m = 0$ -kurven er parallel med den tynde rette linie, men går gennem nulpunktet. m viser sig at afhænge af materialets evne til at pakke sig tæt. For en sand afhænger m af uensformighedstallet.



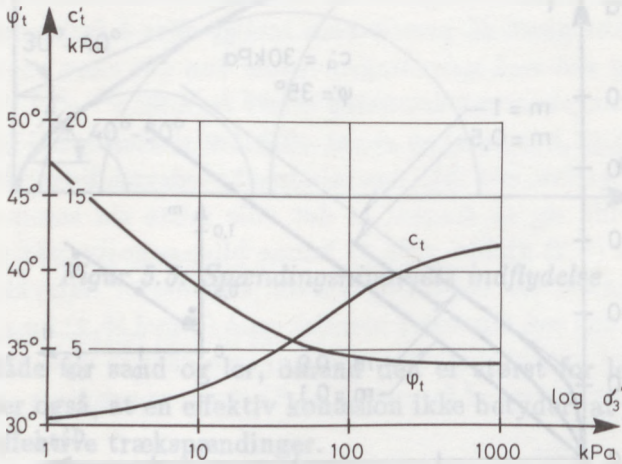
Figur 5.6: Krømningsparameteren m 's indflydelse.

Endelig viser figur 5.7 φ'_i og c'_i variation med spændingsniveauet som et resultat af en forsøgsserie, hvor formel (5.5) blev antaget gældende.

Det er altså ret vanskeligt at fastlægge jords styrkeparametre, selv om man har gode forsøgsserier til rådighed. Det er i virkeligheden i dag således, at en fejlagtig vurdering af styrkeparametrene kan gøre et beregningsresultat dobbelt så stort eller halvt så lille, som det korrekte.

Som det skal vises i bogens næste kapitler fungerer beregningsmetoderne langt mere sikkert. I en eksperts hånd med en præcision på under 10%! Selv ved en overslagsregning på grund af en ret for-

kert brudfigur vil resultatet højst afvige 30%. Det er ikke en opfordring til at kaste sig ud i brudberegninger med forkerte brudfigurer uden at tænke sig grundigt om, men viser at også styrkeparametrene bør måles omhyggeligt.



Figur 5.7: ψ_t og c_t afhænger af mindste hovedspænding (formel 5.5). Optegnet for $m = 0.2$.

5.5 Virkelige styrkeparametre

I virkeligheden afhænger jordens styrke ikke alene af det effektive spændingsniveau, men også af lejringsstæthed. Det blev allerede påpeget af Hvorslev (1937), der indførte de virkelige parametre φ_H og c_H .

Poretallet for sand afhænger næsten udelukkende af den måde, sandet er aflejret på, og næsten ikke af den spændingshistorie, som den senere er underkastet. Derfor er der ikke nogen grund til at

skelne mellem de virkelige og de effektive parametre for sand.

Anderledes stiller sagen sig for ler, der oprindeligt er meget løst lejret og meget sammentrykkeligt. Den senere geologiske historie har derfor sat sit præg på leret. Hvorslev antog, at φ_H for ler er konstant, men at c_H varierer med poretallet.

$$c_H = c_H(e) = c_{H_0} \exp\left(\frac{e_0 - e}{C}\right) \quad (5.6)$$

hvor C er konsolideringsindex.

En normalkonsolideret lers poretal varierer med logaritmen til de effektive spændinger:

$$(e_0 - e) = C \ln(\sigma' / \sigma'_0)$$

og i dette tilfælde bliver c_H proportional med spændingen:

$$c_H = H \sigma' \quad (5.7)$$

hvor H er en konstant. For normalkonsolideret ler lyder Coulombs brudbetingelse derfor:

$$\tau = c_H + \sigma' \tan \varphi_H = \sigma' \cdot (H + \tan \varphi_H) = \sigma' \cdot \tan \varphi' \quad (5.8)$$

altså varierer den virkelige kohæsion på en sådan måde med den effektive spænding, at den effektive kohæsion bliver nul.

En forbelastet lers poretal varierer kun lidt, således som det kan ses på en konsolideringskurve. Derfor ligner de virkelige og de effektive styrkeparametre i dette tilfælde hinanden meget.

De virkelige styrkeparametre er meget vanskelige at bestemme, fordi spændingsniveauet skal ændres uden samtidig ændring af poretal. Det kan dog rimelig godt lade sig gøre for forbelastet jord i udrændede forsøg med måling af effektive spændinger.

5.6 Geotekniske friktionshypoteser

Coulombs brudbetingelse er almindeligt accepteret som den, der beskriver forsøgsresultaterne bedst og simplest. Den kan skrives på mange måder som vist i appendix. For et rent friktionsmateriale fx:

$$\sigma'_{max} - \sigma'_{min} = \sin\varphi' (\sigma'_{max} + \sigma'_{min}) \quad (5.9)$$

hvor σ'_{max} er den største hovedspænding, σ'_{min} den mindste. Den mellemste hovedspænding σ'_{int} indgår ikke i formlen.

Almindeligvis findes $\sin\varphi'$ i triaxiale trykforsøg (med positivt stempeltryk), hvor $\sigma'_{max} > \sigma'_{int} = \sigma'_{min}$. En første undersøgelse af, om φ' afhænger af spændingstilstanden, har ofte været at finde φ' i triaxiale trækforsøg (med negativt stempeltryk), hvor $\sigma'_{max} = \sigma'_{int} = \sigma'_3 > \sigma'_1 = \sigma'_{min}$.

Spændingstilstanden b defineres ofte som

$$b = \frac{\sigma'_{int} - \sigma'_{min}}{\sigma'_{max} - \sigma'_{min}} \quad (5.10)$$

b ligger mellem 0 og 1. $b = 0$ for triaxialt tryk og $b = 1$ for triaxialt træk. Endepunkterne af intervallet dækkes altså af triaxialforsøg. Da man ikke kan opnå homogene tilstande i triaxialt træk, fører sammenligningen ikke til noget brugbart resultat. Der må benyttes andre forsøgstyper.

Der er opstillet andre brudhypoteser for friktionsmaterialer, som søger at medregne den mellemste hovedspænding. Således er Tresca's og von Mises brudbetingelser opstillet på udvidet form:

extended Tresca:

$$\sigma'_{max} - \sigma'_{min} = \alpha p' \quad (5.11)$$

extended v. Mises:

$$(\sigma'_1 - \sigma'_2)^2 + (\sigma'_2 - \sigma'_3)^2 + (\sigma'_3 - \sigma'_1)^2 = 2\alpha^2 p'^2 \quad (5.12)$$

Sidstnævnte kaldes også for Drucker-Pragers brudbetingelse.

De oprindelige formler er udvidet ved at gange konstanten med middelspændingen p' eller p'^2 . Den mellemste hovedspænding indgår i p' og har derfor indflydelse på $\sigma'_{max} - \sigma'_{min}$.

De to sidstnævnte brudhypoteser er sammenfaldende for $b = 0$ og $b = 1$.

b indgår i ext. Tresca og ext. v. Mises på følgende måde

$$3p' = \sigma'_{max} + \sigma'_{int} + \sigma'_{min} = b(\sigma'_{max} - \sigma'_{min}) + 2\sigma'_{min} + \sigma'_{max}$$

eller

$$3p' = \frac{3}{2}(\sigma'_{max} + \sigma'_{min}) + \left(b - \frac{1}{2}\right)(\sigma'_{max} - \sigma'_{min}) \quad (5.13)$$

Tresca og Coulombs brudbetingelser kan sammenlignes ved indsættelse af formel (5.13)

$$\frac{3(\sigma'_{max} - \sigma'_{min})}{\alpha} = \frac{3}{2}(\sigma'_{max} + \sigma'_{min}) + \left(b - \frac{1}{2}\right)(\sigma'_{max} - \sigma'_{min})$$

der fører til

$$\sin\varphi' = \frac{3\alpha}{\alpha + 6 - 2\alpha b} \quad (5.14)$$

Ved analoge betragtninger kan opnås en sammenligning mellem v. Mises og Coulombs brudbetingelser:

$$\sin\varphi' = \frac{3\alpha}{\alpha + 6\sqrt{1 - b + b^2} - 2\alpha b} \quad (5.15)$$

De to sidstnævnte brudbetingelser giver for triaxialt træk, altså for $b = 1$:

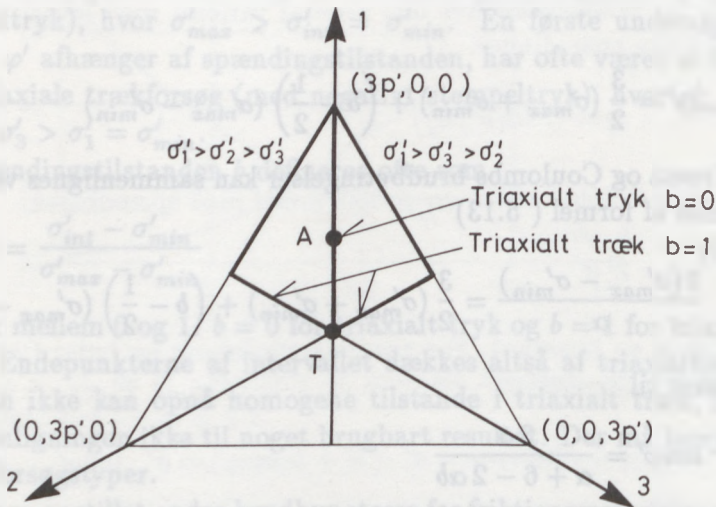
$$\sin\varphi'_{\text{træk}} = \frac{3\alpha}{6 - \alpha}$$

Den størst mulige værdi af α ses at være $\alpha = 1.5$, der svarer til $\varphi'_{\text{træk}} = 90^\circ$.

Den tilsvarende vinkel for triaxialt tryk $b = 0$ bliver da

$$\sin\varphi'_{\text{tryk}} = \frac{3\alpha}{\alpha + 6} = \frac{4.5}{7.5} = 0.6$$

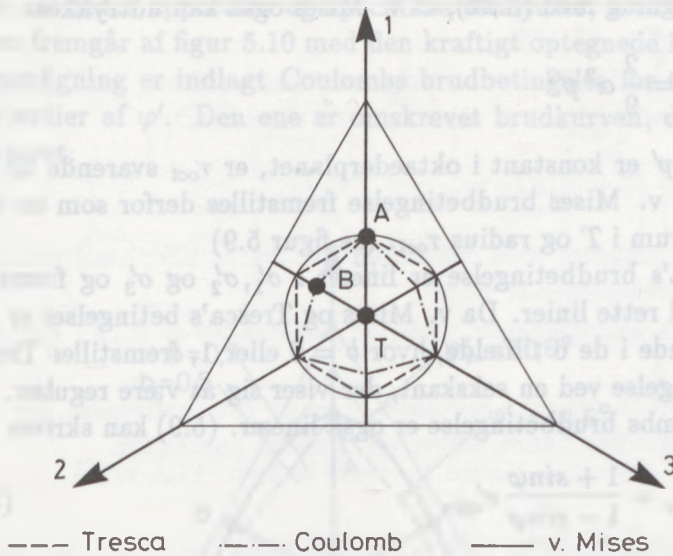
Den størst mulige friktionsvinkel målt i triaxialt tryk skulle da være 36.8° ! Men den er ofte målt over 40° , ja endog over 50° . Derfor kan ext. Tresca og ext. v. Mises ikke være korrekte.



Figur 5.8: Afbildning af rumlige spændingstilstande.

For at kunne studere virkningen af b afbildes den rumlige spændingstilstand på oktaederplanet. Se figur 5.8. I appendix er gennemgået den teoretiske baggrund for afbildningsformen, hvis hovedtræk er

1. Oktaederplanet afbildes i en ligesidet trekant, hvis vinkelhalveringslinier er afbildningsakser for de tre hovedspændinger.



Figur 5.9: Brudhypoteser.

2. Spændingerne er nul ved en side og $3p'$ ved en vinkelspids. Målestokken er givet af middelspændingen.
3. I tyngdepunktet (punkt T) er $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = p'$. Spændingstilstanden er isotrop.
4. Trekanten deles af vinkelhalveringslinien i 6 delområder, hvori hver af hovedspændingerne er enten σ'_{max} , σ'_{int} eller σ'_{min} . Med kraftig optrukken streg er angivet de to områder hvor $\sigma'_1 = \sigma'_{max}$. I grænsen mellem de to områder er $\sigma'_2 = \sigma'_3 = \sigma'_{min}$. På denne dellinie skal det triaxiale trykforsøg afbildes. De korte liniestykker svarer til $b = 1$.

Idet det antages, at brudværdien for triaxialt tryk svarer til

punkt A, kan v. Mises brudbetingelse let optegnes. Det ses ved sammenligning med (3.22), at v. Mises også kan udtrykkes:

$$\tau_{oct}^2 = \frac{2}{9} \alpha^2 p'^2$$

eller idet p' er konstant i oktaederplanet, er τ_{oct} svarende til brud konstant. v. Mises brudbetingelse fremstilles derfor som en cirkel med centrum i T og radius τ_{oct} . (se figur 5.9)

Tresca's brudbetingelse er lineær i σ'_1, σ'_2 og σ'_3 og fremstilles derfor ved rette linier. Da v. Mises og Tresca's betingelser er sammenfaldende i de 6 tilfælde, hvor $b = 0$ eller 1, fremstilles Tresca's brudbetingelse ved en sekskant, der viser sig at være regulær.

Coulombs brudbetingelse er også lineær. (5.9) kan skrives

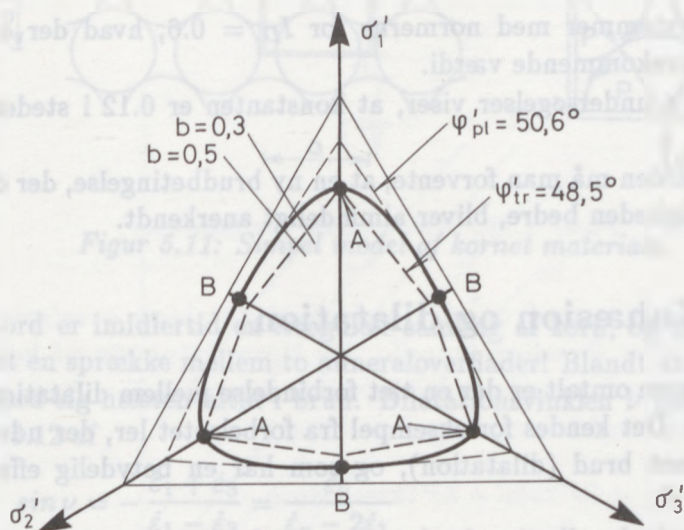
$$\sigma'_{max} = \frac{1 + \sin\varphi}{1 - \sin\varphi} \sigma'_{min} \quad (5.16)$$

I det område, hvor $\sigma'_1 > \sigma'_2 > \sigma'_3$, er σ'_1 altså proportional med σ'_3 . Punkt A, der er forsøgsresultatet ligger på linien, der også måtte gå igennem $(0, 3p', 0)$, hvis det ellers lå i det betragtede område. Nu kan kun en del af denne linie benyttes, nemlig AB . På samme måde kan optegnes linier i de øvrige 5 delområder, og der opstår derved en irregulær sekskant. For små værdier af φ' fremstilles Coulombs brudbetingelse næsten af en regulær sekskant. For $\varphi' = 90^\circ$ af den trekant, der begrænser området.

Da det er friktionstyper, der er optegnet, er alle spændinger proportionale med p' , som er målestokken i trekanten. Derfor ligger brudbetingelserne for samme værdi af φ' ens i forhold til oktaederplanet. Brudbetingelsen i det tredimensionale spændingsrum er for v. Mises brudbetingelse en kegle med akse i oktaederplanets normal. De øvrige er tilsvarende pyramider.

I de senere år har forskellige forskere (fx Green 1971, Lade 1972, Bønding 1973) forsøgt ved målinger at opklare den mellemste hovedspændings indflydelse på styrken (fx friktionsvinklen), i prin-

cippet ved hjælp af terningsforsøg. Det vil føre for vidt her at analysere anvendte apparater og specifikke resultater, men hovedtenden- den fremgår af figur 5.10 med den kraftigt optegnede kurve. Til sammenligning er indlagt Coulombs brudbetingelse for to forskellige værdier af φ' . Den ene er omskrevet brudkurven, den anden indskrevet.



Figur 5.10: Måling af rumlige brudtilstande.

Triaxialt tryk giver den mindst mulige friktionsvinkel φ'_{tr} . For værdier af b i nærheden af 0 og 1 synes v. Mises brudhypotese at være en god tilnærmelse, den giver jo ikke knæk i kurven. Den plane tøjningstilstand, som hyppigt optræder i praksis er ikke veldefineret, men afhænger af jordens tøjningsegenskaber. Den svarer til, at b er et sted mellem 0.2 og 0.5, altså er det alt i alt en god tilnærmelse at anvende Coulombs brudhypotese med to forskellige værdier af φ' .

Allerede længe inden da havde Brinch Hansen argumenteret for

at den plane friktionsvinkel måtte være højere end den triaxiale, og de danske funderingsnormer fra 1965 foreskrev en forhøjelse af den triaxialt målte på 10%.

Bønding (1973) angiver følgende sammenhæng mellem φ'_{pl} og φ'_{tr} , idet der dog kun er undersøgt en sandsort:

$$\varphi'_{pl} = (1 + 0.16 I_D)\varphi'_{tr} \quad (5.17)$$

der altså stemmer med normerne for $I_D = 0.6$, hvad der er en hyppigt forekommende værdi.

Green's undersøgelser viser, at konstanten er 0.12 i stedet for 0.16.

I fremtiden må man forvente, at en ny brudbetingelse, der dækker virkeligheden bedre, bliver almindeligt anerkendt.

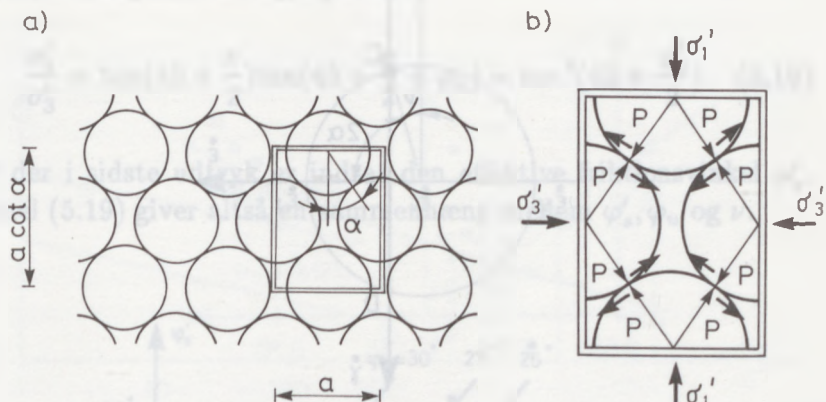
5.7 Kohæsion og dilatation

Som tidligere omtalt er der en tæt forbindelse mellem dilatation og kohæsion. Det kendes for eksempel fra forbelastet ler, der udvider sig i drænet brud (dilatation), og som har en betydelig effektiv kohæsion c' .

Coulombs brudbetingelse kan bruges på to blokke af et mineral fx kvarts, der har to plane sider. De to blokke tvinges til at glide på hinanden og der findes

$$\tau \leq c_\mu + \sigma' \tan \varphi_\mu$$

hvor c_μ og φ_μ er mineralets kohæsion og friktionsvinkel. Den afhænger af mineralets sammensætning, overfladeruheden og den væske, der er i brudfladen. c_μ findes næsten altid til nul, undtagen ved materialer, der er sammenkittede. De fleste mineraler kan opfattes som rene friktionsmaterialer. For kvarts findes $\varphi_\mu = 22-30^\circ$ (Rowe 1962).



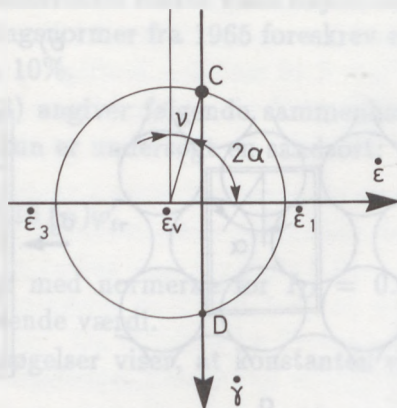
Figur 5.11: Simple model af kornet materiale.

Jord er imidlertid en irregulær samling af korn, og ligner ikke meget en sprække mellem to mineraloverflader! Blandt andet udvider jord sig næsten altid i brud. Dilatationsvinklen ν findes ifølge figur 5.12 af

$$\sin \nu = -\frac{\dot{\epsilon}_1 + \dot{\epsilon}_3}{\dot{\epsilon}_1 - \dot{\epsilon}_3} = \frac{\dot{\epsilon}_\nu}{\dot{\epsilon}_\nu - 2\dot{\epsilon}_1} \quad (5.18)$$

hvor den sidste formulering gælder både i det plane og det triaxiale tilfælde.

Selv den simplest mulige model af en sandmasse kan imidlertid bruges til at påvise dilatationens indflydelse på jords styrke. Fig. 5.11a viser en række cylindre med ens diametre, der ligger i en regulær lejring, der er karakteriseret ved vinklen α . Modellen er altså plan, men det kan påvises at en tilsvarende model, der består af kugler i en regulær opbygning, fører til samme resultat. Modellen kan betragtes som sammensat af en række små elementer (fig. 5.11b), der består af fire halvkugler. Elementets lodrette sider ses at være $\cot\alpha$ gange så store som de vandrette sider. På elementet virker



Figur 5.12: Mohrs cirkel for tøjninger.

normalspændinger σ'_1 og σ'_3 , der for små flytninger overføres som normalkræfter P mellem kornene. For større flytninger må kornene glide på hinanden og der udvikles friktionskræfter $T = P \tan \varphi_\mu$.

Ved ligevægtsbetragtninger ses let at

$$\sigma'_1 = 2P \cos \alpha + 2P \tan \varphi_\mu \sin \alpha$$

$$\sigma'_3 \cot \alpha = 2P \sin \alpha - 2P \tan \varphi_\mu \cos \alpha$$

eller

$$\frac{\sigma'_1}{\sigma'_3} = \cot \alpha \cot (\alpha - \varphi_\mu)$$

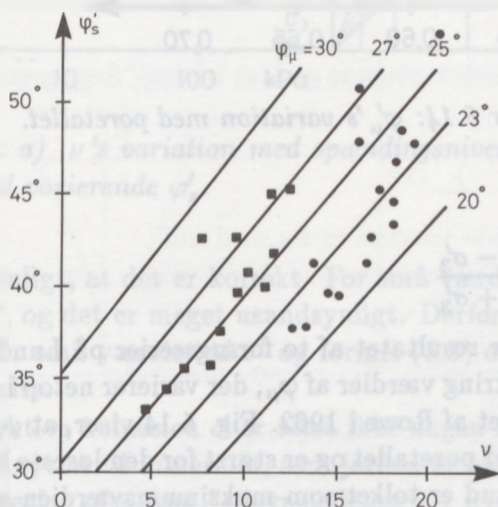
Under glidningen vil de to retninger, der forbinder kornenes centre ikke have længdetøjninger, men kun tværtøjninger. De danner vinklen 2α med hinanden. Af Mohrs cirkel for tøjningstilvækster, fig. 5.12, ses da

$$\nu + 2\alpha = 90^\circ$$

hvorefter udtrykket for σ'_1/σ'_3 bliver:

$$\frac{\sigma'_1}{\sigma'_3} = \tan\left(45 + \frac{\nu}{2}\right)\tan\left(45 + \frac{\nu}{2} + \varphi_u\right) = \tan^2\left(45 + \frac{\varphi'_s}{2}\right) \quad (5.19)$$

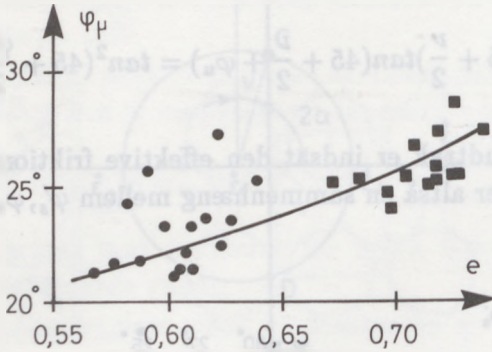
idet der i sidste udtryk er indsat den effektive friktionsvinkel φ'_s . Formel (5.19) giver altså en sammenhæng mellem φ'_s , φ_u og ν .



Figur 5.13: Sammenhæng mellem φ'_s , φ_μ og ν

Ud over denne ligning kan en model med regulære pakninger ikke bruges. Der vil være to foretrukne brudretninger i modellen, medens alle retninger er lige sandsynlige i en irregulær pakning med mange kornstørrelser.

Formel (5.19) kan imidlertid afprøves direkte ved triaxialforsøg, idet den effektive sekantfriktionsvinkel φ'_s er defineret ved (formel



Figur 5.14: φ'_μ 's variation med poretallet.

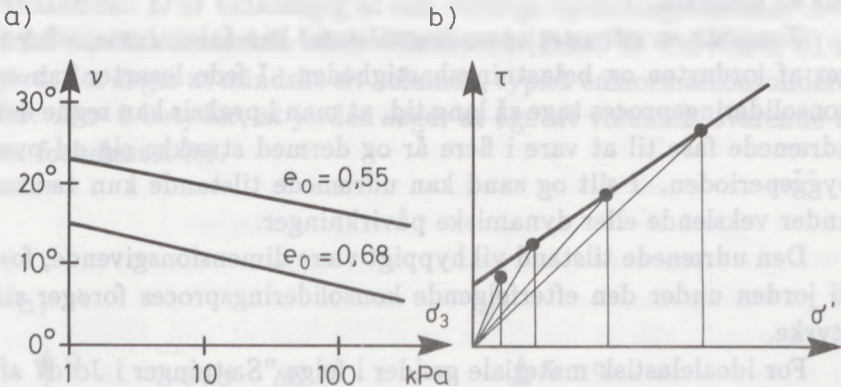
5.9):

$$\sin \varphi'_s = \frac{\sigma'_1 - \sigma'_3}{\sigma'_1 + \sigma'_3} \quad (5.20)$$

Fig. 5.13 viser resultatet af to forsøgsserier på Lund Sand. De grupperer sig omkring værdier af φ_μ , der varierer netop i det samme interval som fundet af Rowe i 1962. Fig. 5.14 viser, at φ_μ tilsyneladende varierer med poretallet og er størst for den løseste lejrning. Det skyldes dog, at brud er tolket som maksimumsværdien af $(\sigma_1 - \sigma_3)$ og forskellen vil udjævnes ved større tøjninger.

ν er ikke en konstant. Den afhænger foruden af lejrningstætheden også af spændingsniveauet. Den er størst for små spændinger (se fig. 5.15a). Formel (5.19) viser imidlertid, at hvis ν afhænger af spændingsniveauet, så gør φ_s det også. Figur 5.15b viser da, at det betyder, at sandet må anses for at være i besiddelse af en effektiv kohæsion. Tangentparametre bliver da φ'_i og c'_i og det gælder at $\varphi'_i < \varphi'_s$.

Såfremt sandets brud kunne beskrives nøjagtigt ved hjælp af c'_i og φ'_i , måtte ν for store værdier af σ' gå mod en konstant værdi og



Figur 5.15: a) ν 's variation med spændingsniveauet. b) brudbetingelse med varierende ϕ'_s .

det er da muligt, at det er korrekt. For små værdier af σ' måtte ν gå mod 90° , og det er meget usandsynligt. Derfor er brudbetingelsen krum for små værdier af σ' og formel (5.5) er derfor en bedre brudbetingelse.

Den effektive kohæsion c' er altså ikke nogen materialeparameter, der er knyttet til mineralet, som jorden er opbygget af, og den benævnes derfor ofte som "tilsyneladende", i hvert fald for sand. Ved analytiske brudberegninger drejer det sig imidlertid om at beskrive den målte afhængighed mellem τ og σ' bedst mulig, og da er det nødvendigt at betragte sandets kohæsion c' som en realitet, nøjagtig som man vil gøre for en ler.

5.8 Udrænet tilstand

En spændingsændring er udrænet, hvis den foregår så hurtigt, at det fremkaldte poreovertryk ikke kan nå at ændres på grund af

bortdræning af vand. For vandmættet jord betyder det, at volumenet er konstant.

Hvorvidt en udrænet spændingstilstand kan forekomme, afhænger af jordarten og belastningshastigheden. I fede lerarter kan en konsolideringsproces tage så lang tid, at man i praksis kan regne den udrænedede fase til at være i flere år og dermed strække sig ud over byggeperioden. I silt og sand kan udrænedede tilstande kun tænkes under vekslende eller dynamiske påvirkninger.

Den udrænedede tilstand vil hyppigt være dimensionsgivende, fordi jorden under den efterfølgende konsolideringsproces forøger sin styrke.

For idealelastisk materiale gælder i følge "Sætninger i Jord" afsnit 6.2:

$$\epsilon_v = \frac{1 - 2\mu}{E} \sum \Delta\sigma' \quad (5.21)$$

der i den udrænedede tilstand er lig med nul.

Da E og μ er egenskaber ved jorden, og μ kun sjældent er 0.5, må

$$\sum \Delta\sigma' = 0 \quad \text{eller} \quad \Delta u = \frac{1}{3} \sum \Delta\sigma = \Delta p \quad (5.22)$$

Det ses, at argumentet holder, selv om E og μ ikke er konstanter, og derfor kan udvides til at omfatte andre materialer end idealelastiske, men de skal dog være isotrope. Derfor danner formel (5.21) grundlaget for opstilling af poretryksligninger.

Skemptions poretryksligning lyder

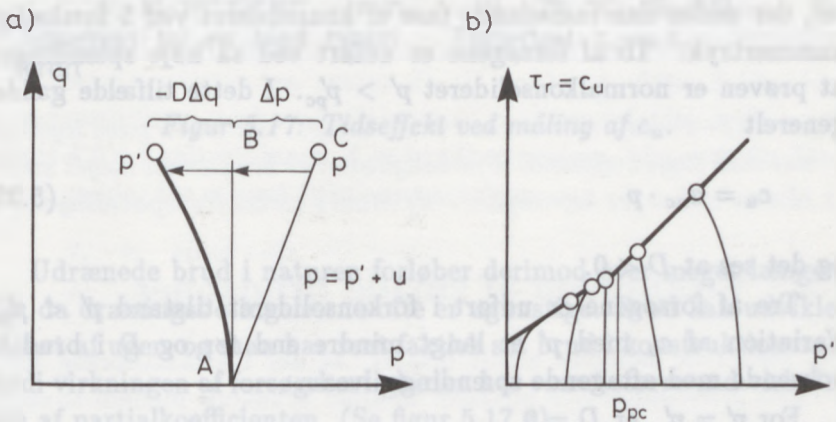
$$\Delta u = \Delta p = \Delta\sigma_3 + A(\Delta\sigma_1 - \Delta\sigma_3) \quad (5.23)$$

hvor $A = 1/3$ for triaxialt tryk, $2/3$ for triaxialt træk og $1/2$ i det plane tilfælde. Målte værdier af A afviger dog hyppigt en del fra de teoretiske værdier.

Poretryksligningen er ændret af Janbu (1976) til

$$\Delta u = \Delta p - D \Delta q \quad (5.24)$$

hvor $\Delta p = \Delta \sigma_m$, $\Delta q = \Delta \sigma_1 - \Delta \sigma_3$ og D er en konstant, der skyldes dilatation. D er uafhængig af den rumlige spændingstilstand. $D = 0$ for elastisk materiale uden volumenudvidelse. $D < 0$ svarer til en jord, der søger at mindske sit volumen, typisk en normalkonsolideret ler. $D > 0$ betyder, at jorden søger at øge sit volumen, svarende til en forbelastet ler.



Figur 5.16: Poretryksobygning i udrænet tilstand. (Normalkonsolideret ler). a) definition af D . b) udrænedede forsøg med forbelastet ler.

Formel (5.23) er meget afgørende for forståelsen af jords opførsel i udrænet spændingstilstand. Det ses, at en ændring i midlsspænding Δp overføres til poretrykket, og at den effektive p' altså ikke kan ændres ved at ændre p . Derimod ændres u med differenspændingen q . På figur 5.16a er med kurve AB vist et forsøg, hvor p er konstant, og hvor $\Delta u = -D\Delta q$ måles, og det effektive spændingsforløb tegnes op (med kraftig streg). Det ses, at $D = 0$ i forsøgets start, men at $D < 0$ i det senere forløb. Udføres et nyt

forsøg med voksende p , angivet ved kurve $A - C$, vil Δp føres over i poretrykket og den effektive spændingsvariation være den samme som før. Brudværdien (den største værdi som q antager) vil også være den samme, uanset hvordan belastningen påføres. Den kaldes derfor den udrænedede forskydningsstyrke c_u , og den kan måles på mange måder, fx ved vingeforsøg, pladeforsøg eller triaxialforsøg.

Den udrænedede forskydningsstyrke afhænger altså kun af den effektive spændingstilstand, før belastningen påføres.

Figur 5.16b viser 5 udrænedede forsøg med den samme moræneler, der under den indledende fase er konsolideret ved 5 forskellige kammertryk. To af forsøgene er udført ved så høje spændinger, at prøven er normalkonsolideret $p' > p'_{pc}$. I dette tilfælde gælder generelt

$$c_u = a_{nc} \cdot p \quad (5.25)$$

og det ses at $D < 0$.

Tre af forsøgene er udført i forkonsolideret tilstand $p' < p'_{pc}$. Variation af c_u med p' er langt mindre end før og D i brud er voksende med aftagende spændingsniveau.

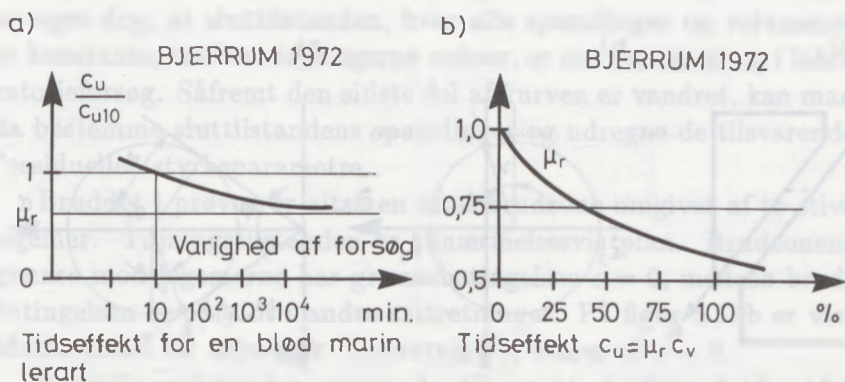
For $p' = p'_{pc}$ er $D = 0$.

Det er endnu ikke klarlagt, hvordan c_u varierer med den mellemste hovedspænding.

Forsøgshastighedens indflydelse

Udrænedede forsøg bør i princippet udføres hurtigt for at undgå lokale omfordelinger af porevandet. Vingeforsøg tager således et par minutter og de simple trykforsøg ca. 10-12 minutter. CU-forsøg med bestemmelse af poretrykket tager derimod 2-4 timer.

Forsøg i laboratoriet på blød marin ler fra Norge viser imidlertid, at jo hurtigere forsøg udføres, desto større måles den udrænedede forskydningsstyrke. Leret opfører sig altså som et viskøst materiale.



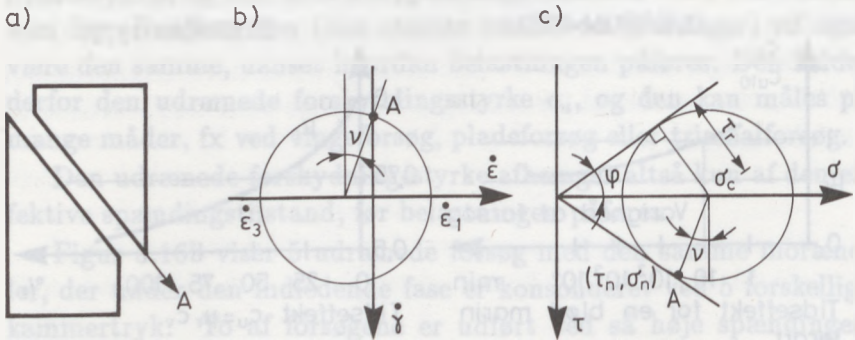
Figur 5.17: Tidseffekt ved måling af c_u .

Udrænedede brud i naturen forløber derimod over meget længere tid, da dræningsbetingelserne ofte er ugunstige. Brud kan udvikles i løbet af uger, og man har rent faktisk set brud i konstruktionerne, fordi virkningen af forsøgshastigheden har været større end virkningen af partialkoefficienten. (Se figur 5.17 a)

De målte udrænedede forskydningsstyrker af bløde marine lerarter må derfor korrigeres. Der foreligger ikke mange sammenlignende forsøg af den viste type, men til gengæld er der altså indtrådt brud i naturen, og der er udført modelforsøg i naturlig størrelse med dæmninger.

Bjerrum har på grundlag af sådanne observationer opstillet den på (figur 5.17 b) viste sammenhæng.

Det kan diskuteres, om undersøgelsen har gyldighed for andre lerarter, men man har i de nye danske funderingsnormer valgt kun at korrigere dyndede lerarters forskydningsstyrke.



Figur 5.18: Forsøg med dobbelt prøvehøjde. a) De to stive legemer er vist med nogen afstand. I virkeligheden er brudzonen meget smal. b) Mohrs cirkel for tøjninger. c) Mohrs cirkel for spændinger.

5.9 Virkningen af smalle brudzoner

Det blev i et tidligere afsnit omtalt, at der i triaxialforsøg med dobbelt prøvehøjde ofte udvikles en smal brudzone mellem to stive legemer (se figur 5.18). Heri foregår alle tøjninger under bruddet, og da brudzonens bredde ikke kendes, kan den ydre måling ikke benyttes til at bestemme tøjninger. Udregnes tøjningerne på grundlag af prøvehøjde bliver de alt for små. Volumenændringen kan ikke styres. I et udrænet forsøg er gennemsnitsvolumenændringen nul, men den smalle brudzone tilføres vand fra de tilgrænsende områder, der herved yderligere styrkes, medens brudzonen svækkes.

I naturen forekommer ofte såkaldt progressive brud (se kapitel 12) fx i forbindelse med stabilitetsbrud i forbelastet ler. De udvikles til smalle brudzoner på samme måde, som det sker i prøver med dobbelt højde. Også her er volumenændringen og poretryksudviklingen i brudfasen ukendt, og sikkert forskellig fra tilsvarende ændringer i triaxialforsøget. Et observeret maximum på en arbejdskurve kan

derfor ikke forventes at svare til progressivt brud i naturen. Det antages dog, at slutttilstanden, hvor alle spændinger og volumenet er konstante, medens tøjningerne vokser, er ens i naturen og i laboratorieforsøg. Såfremt den sidste del af kurven er vandret, kan man da bestemme slutttilstandens spændinger og udregne de tilsvarende "residuelle" styrkeparametre.

Bruddet i prøven er altså en smal brudzone omgivet af to stive legemer. Tøjningstilstanden er tilnærmelsesvis plan. Brudzonens grænse mod legemerne har grænsebetingelsen $\epsilon = 0$, medens brudbetingelsen er opfyldt i andre snitretninger. På figur 5.18b er vist Mohrs cirkel for tøjninger. Snitretning A svarer til $\epsilon = 0$.

Spændingstilstanden svarer da til punkt A , figur 5.18c, idet hovedspændings- og hovedtøjningssnit er sammenfaldende (læs evt. afsnit 4.6). I snitretningen A er brudbetingelsen ikke opfyldt. Derimod gælder for et rent friktionsmateriale:

$$\tau_r = \sin\varphi' \cdot \sigma'_c$$

$$\tau_n = \tau_r \cdot \cos\nu$$

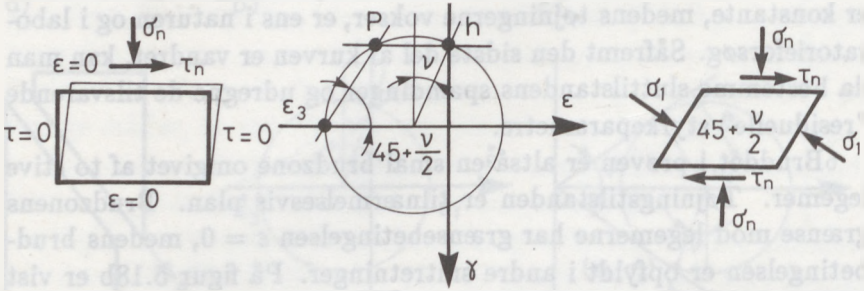
$$\sigma'_n = \sigma'_c - \tau_r \sin\nu$$

eller

$$\frac{\tau_n}{\sigma'_n} = \frac{\sin\varphi' \cos\nu}{1 - \sin\varphi' \sin\nu} = \tan\varphi'_d \quad (5.26)$$

hvor φ'_d da er en tilsyneladende friktionsvinkel, der afhænger af ν . For $\nu = 0$ svarende til slutttilstanden er $\tan\varphi'_d = \sin\varphi'$. Kun såfremt $\nu = \varphi'$ gælder den sædvanlige antagelse, at $\tan\varphi'_d = \tan\varphi'$. Forskellen mellem φ'_d og φ' er ringe. For $\varphi' = 35^\circ$ og $\nu = 0^\circ$ fås således $\varphi'_d = 30^\circ$. Men det svarer til forskellen mellem karakteristisk og regningsmæssig φ' , og kan altså betyde, at sikkerheden forsvinder fuldstændig.

Anvendes φ' på et stabilitetsproblem, hvor der udvikles en smal brudzone, forsvinder sikkerheden netop. Her bør anvendes φ_d ud fra de samme overvejelser som før.



Figur 5.19: Tøjningsforhold i vellykket forskydningsforsøg.

Brudforløbet i en smal brudzone kan studeres i detaljer i et skærboxforsøg (fig. 5.2 type f). Zonen fylder her hele apparatet, men er ellers identisk med den der træffes i triaxialforsøget med dobbelt prøveøjde. Har apparatet ru trykhoveder men glatte sider, er $\epsilon = 0$ i vandrette snit og $\tau = 0$ i lodrette snit, hvis tilstanden er homogen.

På figur 5.19 er den vandrette snitretning kaldt h . Ved at trække en vandret linie gennem h findes polen P som liniens anden skæring med cirklen. De "lodrette" sider skal i brud danne vinklen $45 + \frac{\nu}{2}$ med vandret og normalspændingen på siderne er σ_1 .

Man skal altså strengt taget måle ν i brudtilstanden, sikre sig at den spidse vinkel mellem trykhovedet og side er $45 + \frac{\nu}{2}$, og tolke forholdet mellem τ_n og σ'_n , virkende på trykhovedet som φ'_d .

I praksis tildannes prøven med lodrette sider, og man finder sig i eventuelle fejl.

5.10 Oversigt over drænedede styrkeparametre

Det kan være meget vanskeligt at opnå oversigt over vurdering af drænedede tilstande. Hovedkonklusioner er imidlertid:

1. Styrkeparametre defineres bedst ud fra Coulombs brudbetingelse, der er den mest korrekte af de simple brudbetingelser (5.9, 5.11 og 5.12). Coulombs brudbetingelse er en god tilnærmelse for meget løse lejringer.
2. For middelfaste og faste jordarter er friktionsvinklen i plan tilstand større end i triaxial tilstand, i gennemsnit ca. 10% (5.17).
3. Den effektive kohæsion c' virker som en forøgelse af alle spændinger og kan indregnes på denne måde. (se eksempel 5.1). Det er kun nødvendigt at gennemføre beregninger for rent friktionsmateriale.
4. Selv om der normalt for sand bestemmes både c_i og φ'_i er det stadig praksis at se bort fra c'_i , eventuelt forhøjes φ'_i da til φ'_s .
5. Ved analyser på grund af "modelforsøg" med spændingsniveauer, der afviger fra de faktiske spændingsniveauer, må virkningen af den krumme indhyllingskurve tages med i vurderingen.

Anvendelsen af friktionsvinklen til plasticitetsteoretiske beregninger er ikke problemløs. Strengt taget kan plasticitetsteorien i den normale form slet ikke anvendes på et friktionsmateriale. Dette problem tages op i kapitel 9.

Brudanalyser

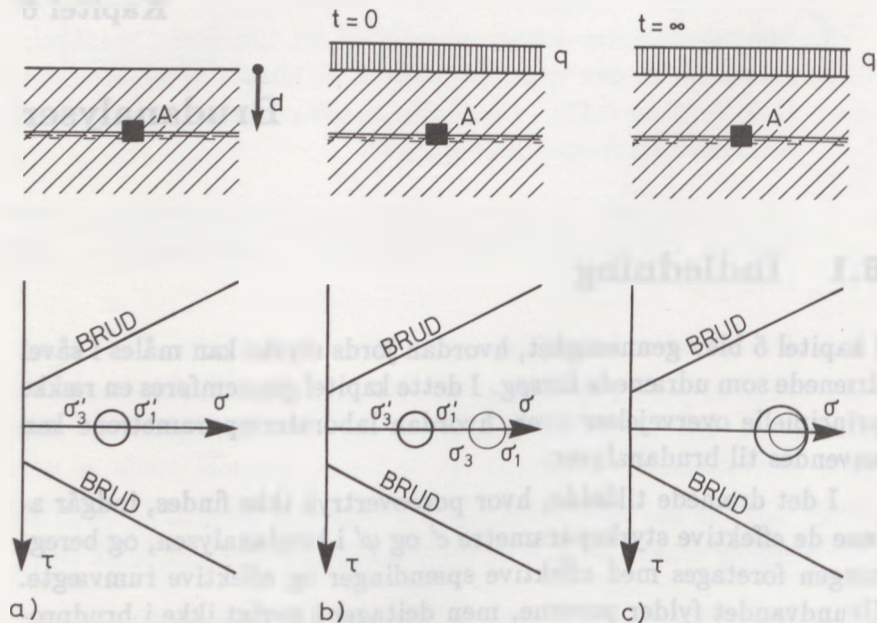
6.1 Indledning

I kapitel 5 blev gennemgået, hvordan jords styrke kan måles i såvel drænedes som udrænedes forsøg. I dette kapitel gennemføres en række principielle overvejelser over, hvordan laboratorieparametrene kan anvendes til brudanalyser.

I det drænedes tilfælde, hvor poreovertryk ikke findes, indgår alene de effektive styrkeparametre c' og φ' i brudanalysen, og beregningen foretages med effektive spændinger og effektive rumvægte. Grundvandet fylder porerne, men deltager i øvrigt ikke i brudprocessen. Selv strømmende grundvand kan tages i regning på denne måde, således som gennemgået i Lærebog i Geoteknik, kapitel 5 og 10. Beregningerne kan være relativt komplicerede, men man er aldrig i tvivl om, at det er de effektive styrkeparametre, der skal anvendes.

I det udrænedes tilfælde, hvor over- eller undertryk udvikles i porerne under belastning, er forholdene langt mere komplicerede, og giver ofte anledning til tvivl om fremgangsmåden ved brudanalyserne. Således argumenteres hyppigt for, at man også kan udføre $c' - \varphi'$ analyser i udrænet tilstand, og som det skal vises holder denne fremgangsmåde ikke for en nøjere prøvelse.

Dette kapitel er derfor skrevet med henblik på at afklare forholdene under udrænedede omstændigheder, samt sammenhængen mellem drænedede og udrænedede tilstande, der afløser hinanden. For at gøre kapitlet så forståeligt som muligt, er det bygget op over et eksempel. Til sidst i kapitlet uddrages de principielle konklusioner.



Figur 6.1: Insitu spændinger.

- under drænedede forhold
- umiddelbart efter belastning af overflade,
- og udvikling af spændinger herefter.

———— Effektive spændinger

----- Totale spændinger

Eksemplet er et fundament, der er direkte funderet på en forbelastet ler. Fundamentet vil dog også – af principielle grunde – blive anbragt på normalkonsolideret ler, selv om det næppe nogensinde

sker i praksis. Desuden antages kapillariteten - for simpeltheds skyld - at være forsvindende, hvad der normalt ikke er tilfældet.

6.2 In-situ spændinger

Først betragtes det simpleste tilfælde, nemlig spændingsforholdene i et jordelement, der ligger i grundvandsspejlet i et vandret jordlag uden belastning på overfladen. Det er let at angive de effektive spændinger, nemlig en lodret hovedspænding $\sigma'_1 = \gamma' d$ og en vandret hovedspænding $\sigma'_3 = K^0 \cdot \sigma'_1$, hvor K^0 er hviletrykskoefficienten. Mohrs cirkel for denne tilstand er optegnet i figur 6.1 a).

Indlægges også Coulombs brudbetingelse, ses det, at tilstanden er langt fra brud. Men der er altså forskydningspændinger i in situ tilstanden, blot ikke i lodrette og vandrette snit. De største forskydningspændinger ses at ligge i snit, der hælder 45° . Belastes jordoverfladen med en udstrakt belastning, optræder samme maksimale spændingstilstande som i et konsolideringsapparat. Overfladelasten q bæres alene af poreovertryk (se Lærebog i Geoteknik, bind 1). De effektive spændinger er uændrede, men Mohrs cirkel for totale spændinger rykker q ud ad σ -aksen uden at ændre diameter. Under konsolideringsprocessen overføres lasten q efterhånden til den lodrette, effektive spænding σ'_1 . I vandret retning bliver den effektive spænding dog aldrig så stor som den totale. Se figur 6.1 c). I den nye drænedede tilstand vil spændingerne være lige så langt fra brud som før.

En udstrakt overfladebelastning medfører ikke brud i jorden, "kun" sætninger.

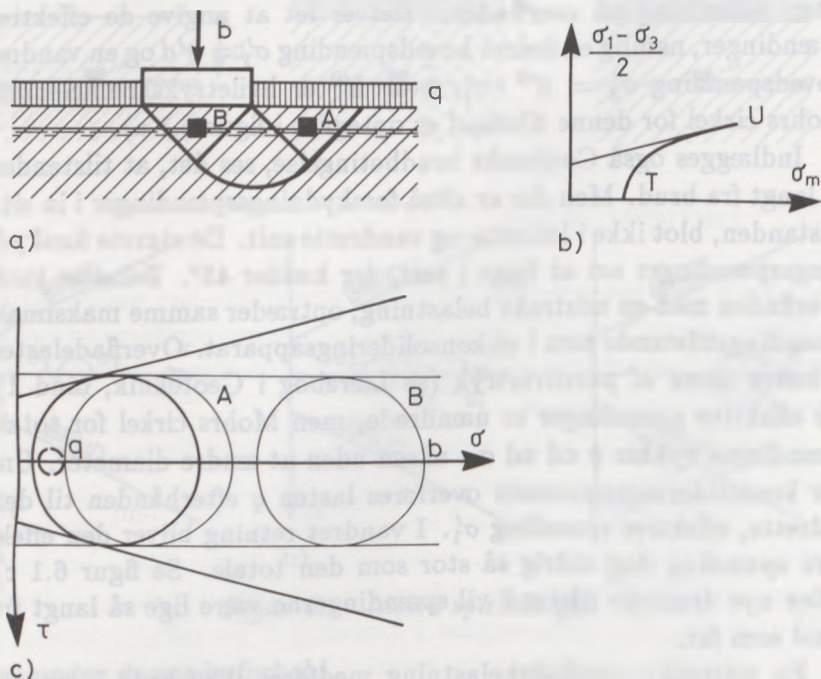
6.3 Udrænet brud

Forbelastet ler

Belastes jordoverfladen nu af et fundament med hastigt voksende belastning, vil der opstå udrænet brud i jorden. På fig. 6.2 ses et

stribefundament, der netop er belastet til brud. Der er skitseret en eensidig brudfigur bestående af tre brudzoner. Der betragtes spændingsforholdenes udvikling i to jordelementer *A* og *B*, der ligger i samme dybde.

Før belastning af fundamentet har de to elementer samme spændingstilstand, angivet ved punkteret cirkel i c) på fig. 6.2.



Figur 6.2: Udrænet brud under stribefundament.

b) Tilsvarende triaxialforsøg.

c) Spændingsændring i to elementer.

I laboratoriet kan man udføre et udrænet triaxialforsøg fra denne spændingstilstand. Se punkt *T* i fig. 6.2 b). Triaxialforsøget viser, at de effektive spændinger ved udrænet belastning alene afhænger af den initiale, effektive spændingstilstand og den påførte forskyd-

ningsspænding, altså uafhængigt af hvilke totale spændinger, der i øvrigt påføres. I brud vil spændingstilstanden svare til punkt U .

De to jordelementer A og B under fundamentet har samme effektive initialspændingstilstand og vil derfor have samme effektive Mohrske cirkel i brud. Imidlertid varierer poreovertrykkene. De er langt større under fundament (i punkt B) end uden for fundamentet (i punkt A). De Mohrske cirkler for totale spændinger har derfor forskellig beliggenhed, men samme diameter.

Ved en beregning af ligevægtstilstande i brud, er der altså ikke hydrostatisk trykfordeling i porevandet, og trykket heri må medtages. Analysen må gennemføres i totale spændinger. Fællestangenten for de Mohrske cirkler er vandret. Jorden har en udrænet forskydningsstyrke c_u , medens den udrænedede friktionsvinkel φ_u er nul.

Argumentationen er gennemført i et niveau i jorden, hvor den initiale, effektive spændingstilstand er ens. I en forbelastet jord gælder det imidlertid med god tilnærmelse, at den effektive brudtilstand og dermed c_u næsten ikke afhænger af den initiale, effektive spændingstilstand. Der er altså (næsten) samme effektive Mohrske cirkel overalt.

Konklusion: I udrænet brud har ethvert jordelement altså sin egen totale spændingstilstand, men der hersker en effektiv spændingstilstand, der kun afhænger af den drænedede tilstand før belastning.

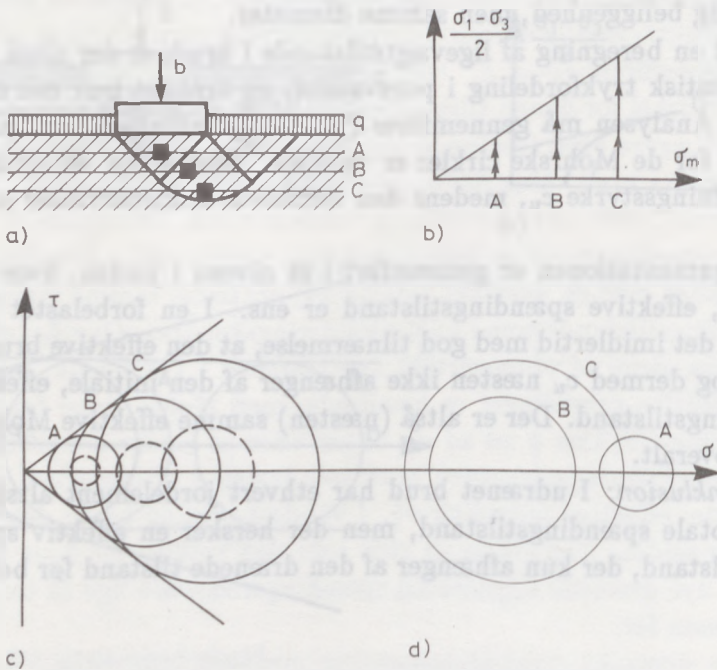
Normalkonsolideret ler

En normalkonsolideret ler adskiller sig fra en forbelastet ler ved, at den effektive kohæsion $c' \simeq 0$, og at D er konstant og næsten 0 (se formel 5.24). Heraf ses, at c_u er proportional med de effektive begyndelsesspændinger, figur 6.3 b).

Mohrs cirkler for effektive spændinger i de tre niveauer A , B og C har en radius, der er proportional med den initiale, effektive

middelspænding, og fællestangenten går gennem nul. Her var det således nærliggende at give sig i kast med en udrænnet analyse i effektive spændinger.

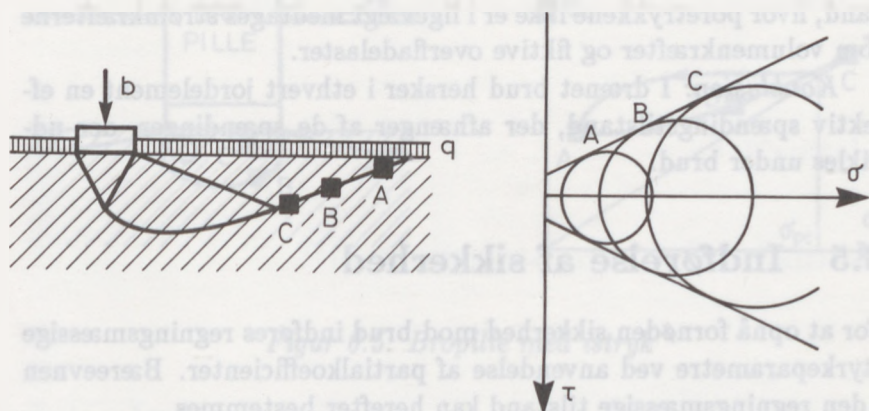
Det er imidlertid stadig meningsløst. De tre viste Mohrske cirkler angiver nemlig de effektive brudspændinger i hver sin kote (!) og ikke svarende til hver sit element i brudfiguren.



Figur 6.3: Udrænnet brud under sribefundament på normalt konsolideret ler.

- b) tilsvarende triaxialforsøg.
- c) — effektive spændinger
- d) — totale spændinger

Det kunne også overvejes at udføre brudanalysen med $\varphi_u \neq 0$. Nu har de totale Mohrske cirkler jo hver sin radius og en fælles-



Figur 6.4: Drænet brud under sribefundament.

tangent kan indlægges. Fig. 6.3 d) viser, at det heller ikke kan lade sig gøre. Poretrykket i *A* er nemlig større end i *B*, der igen har større poretryk end i *C*. Placeringen af cirklerne afhænger af, hvilke elementer der betragtes.

Imidlertid afhænger diametren i cirklerne svarende til totale spændinger kun af koten. En analyse kan derfor gennemføres med et c_u , der er proportionalt med dybden.

6.4 Drænet brud

I drænet brud er de totale og effektive spændingstilvækster lige store. Spændingsændringer langs med enhver linie i en brudzone medfører derfor nye effektive Mohrske cirkler, se fig. 6.4, der tangerer Coulombs brudbetingelse. Jorden har en effektiv friktionsvinkel $\varphi' \neq 0$ og muligvis også $c' \neq 0$. Brudanalyser gennemføres i effektive spændinger.

Ved stillestående grundvand holder poretrykkene indbyrdes lige-

vægt; der er hydrostatisk trykfordeling. Ved strømmende grundvand, hvor poretrykkene ikke er i ligevægt medtages strømkræfterne som volumenkræfter og fiktive overfladelaster.

Konklusion: I drænet brud hersker i ethvert jordelement en effektiv spændingstilstand, der afhænger af de spændinger, der udvikles under brud.

6.5 Indførelse af sikkerhed

For at opnå fornøden sikkerhed mod brud indføres regningsmæssige styrkeparametre ved anvendelse af partialkoefficienter. Bæreevnen i den regningsmæssige tilstand kan herefter bestemmes.

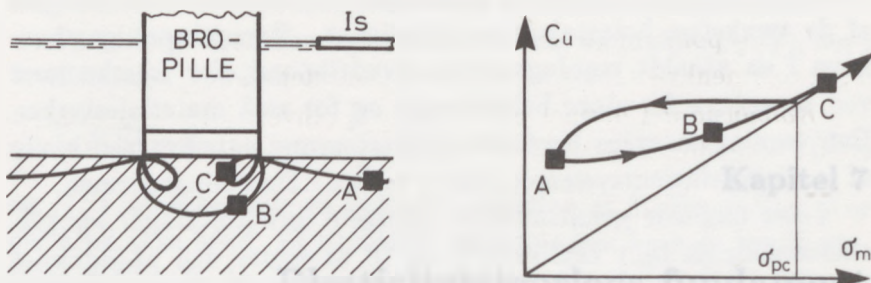
Den regningsmæssige tilstand er imidlertid helt fiktiv. Man kan for eksempel ikke finde de virkelige spændinger i jorden ud fra brudfiguren. Da tilstanden er langt fra brud, er det langt bedre at finde dem ud fra elasticitetsteorien.

6.6 Bevægelig last

Der betragtes et fundament, der gennem længere tid har båret en statisk belastning, fx en bropille, der bærer sin og broens egenvægt. Den belastes nu pludseligt med en stor bevægelig belastning, fx istryk. Se fig. 6.5. Hvilke styrkeparametre kan benyttes i dette tilfælde?

Som det allerede er vist, kan analysen kun gennemføres med totale spændinger og udrænedede forskydningsstyrker. Men såfremt bropillen er færdigkonsolideret for egenvægt inden den bevægelige belastning optræder, kan man tillade sig at regne med en forøgelse af c_u , fordi det effektive spændingsniveau er øget. Forøgelsen må beregnes ud fra elasticitetsteorien, se forrige afsnit. c_u kan derfor variere kraftigt i det område, som brudfiguren dækker.

Beregningen kan blive ganske omstændelig. Man foretrækker



Figur 6.5: Bropille med istryk

derfor at benytte de noget mindre c_u -værdier, der svarer til in situ-tilstanden.

6.7 Konklusion

I den dræned tilstand afhænger τ i brud af de øjeblikkelige effektive spændinger. En analyse af brudtilstanden skal derfor gennemføres med effektive spændinger og effektive styrkeparametre φ' og evt. c' , en såkaldt $c' - \varphi'$ analyse.

I den udræned tilstand afhænger τ i brud af de initiale, effektive spændinger, men er uafhængig af de spændinger, der udvikles i brudforløbet. Derfor kan der ikke udføres en $c' - \varphi'$ analyse. Der må gennemføres en analyse i totale spændinger med udræned forskydningsstyrker, der eventuelt varierer over den betragtede jordmasse. ($\varphi = 0$ analyse).



Brudflader og sikkerhed. I denne forbindelse er det vigtigt at bemærke, at sikkerhedsfaktoren er et forhold mellem den tilgængelige modstand og den krævede modstand. Hvis sikkerhedsfaktoren er mindre end 1,0, betyder det, at der er risiko for brud. Hvis sikkerhedsfaktoren er større end 1,0, betyder det, at der er sikkerhed. I denne forbindelse er det vigtigt at bemærke, at sikkerhedsfaktoren er et forhold mellem den tilgængelige modstand og den krævede modstand. Hvis sikkerhedsfaktoren er mindre end 1,0, betyder det, at der er risiko for brud. Hvis sikkerhedsfaktoren er større end 1,0, betyder det, at der er sikkerhed.

Brudflader og sikkerhed. I denne forbindelse er det vigtigt at bemærke, at sikkerhedsfaktoren er et forhold mellem den tilgængelige modstand og den krævede modstand. Hvis sikkerhedsfaktoren er mindre end 1,0, betyder det, at der er risiko for brud. Hvis sikkerhedsfaktoren er større end 1,0, betyder det, at der er sikkerhed. I denne forbindelse er det vigtigt at bemærke, at sikkerhedsfaktoren er et forhold mellem den tilgængelige modstand og den krævede modstand. Hvis sikkerhedsfaktoren er mindre end 1,0, betyder det, at der er risiko for brud. Hvis sikkerhedsfaktoren er større end 1,0, betyder det, at der er sikkerhed.

Brudflader og sikkerhed. I denne forbindelse er det vigtigt at bemærke, at sikkerhedsfaktoren er et forhold mellem den tilgængelige modstand og den krævede modstand. Hvis sikkerhedsfaktoren er mindre end 1,0, betyder det, at der er risiko for brud. Hvis sikkerhedsfaktoren er større end 1,0, betyder det, at der er sikkerhed.

Kapitel 7

Plasticitetsteoriens fundament

7.1 Indledning

Plasticitetsteorien har siden sin fremkomst i halvtredserne været meget brugt i geotekniske beregninger i Danmark, og benyttes nu også af mange andre fagområder.

Formålet med dette korte kapitel er at understrege de vigtigste forskelle i ordvalg og problemstillinger ved den traditionelle og den geotekniske anvendelse af teorien.

Brud i jord er således en tilstand, hvor tøjningerne kan blive vilkårligt store uden at spændingerne øges. Denne tilstand kaldes ofte for flydning i andre fag, men flydning i jord dækker et andet fænomen, der omtales nærmere i sætninger i jord.

Plasticitetsteoriens store anvendelighed bygger på de såkaldte øvre- og nedreværdisætninger. Den muliggør en vurdering af den belastning, der skal til for at frembringe en brudtilstand i jorden, også selv om grundlaget for beregningen kun er tilnærmet.

Det kan ofte være vanskeligt eller umuligt at finde en korrekt brudberegning for en jordtrykspåvirket konstruktion, men plasticitetsteorien muliggør også en vurdering af nøjagtigheden i den tilnærmede beregning.

Brudberegningerne tjener til at undersøge, om en given kon-

I figurerne vil \bar{S} blive fremstillet som en todimensional vektor.

Spændingstilstanden kan udtrykkes som en funktion $f(\bar{S})$, der i brud antager værdien 0:

$$f(\bar{S}) = 0 \quad (7.2)$$

og $f(\bar{S})$ indrettes som en voksende funktion af \bar{S} . For $f(\bar{S}) < 0$ er der altså ikke brud. Et tilfældigt materiale kan have en brudbetingelse $f(\bar{S}) = 0$, der helt omslutter et område, hvori $f(\bar{S}) < 0$, og hvori de mulige spændingstilstande findes (fig. 7.1a).

Et materiale siges at være stift plastisk, hvis det er stift for $f(\bar{S}) < 0$, og plastisk for $f(\bar{S}) = 0$. For $f(\bar{S}) = 0$ forløber tøjningerne da uden spændingsændringer. I stedet for tøjningen ϵ , anvendes derfor tøjningshastigheden $\dot{\epsilon}$.

7.3 Tøjningstilstanden

Tøjningstilstanden i et givet punkt i materialet kan udtrykkes ved

$$\bar{D} = (\dot{\epsilon}_x, \dot{\epsilon}_y, \dot{\epsilon}_z, \dot{\varphi}_{xy}, \dot{\varphi}_{yz}, \dot{\varphi}_{zx}) \quad (7.3)$$

\bar{D} vil også blive fremstillet som en todimensional vektor i figurerne.

v. Mises antager, at såfremt et legeme deformeres vil spændinger i ethvert punkt antage sådanne værdier, at modstanden mod deformation bliver maksimal:

$$U = \bar{D} \cdot \bar{S} = U_{max} \quad (7.4)$$

På fig. 7.1 b ses en vektor \bar{S} , der repræsenterer spændingstilstanden i et punkt i brud. Såfremt \bar{S} gives en lille tilvækst, vil arbejdet pr. tidsenhed (effekten) U ikke ændres; U antager jo en maksimumsværdi for den betragtede værdi af \bar{S} :

$$dU = \bar{D} \cdot d\bar{S} = \dot{\epsilon}_x d\sigma_x + \dot{\epsilon}_y d\sigma_y + \dot{\epsilon}_z d\sigma_z + \dots = 0$$

Er legemet stadig i brud, er også $f(\bar{S})$ uændret:

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_x} d\sigma_x + \frac{\partial f}{\partial \sigma_y} d\sigma_y + \frac{\partial f}{\partial \sigma_z} d\sigma_z + \dots = 0$$

Det ses kun at være tilfældet, såfremt

$$\bar{D} = k \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_x}, \frac{\partial f}{\partial \sigma_y}, \frac{\partial f}{\partial \sigma_z}, \dots \right) \quad (7.5)$$

Afbildes tøjningen nu i samme koordinatsystem som spændings-tilstanden med tilsvarende spændinger og tøjningshastigheder ud ad akserne bliver \bar{D} altså normal til brudfladen. Da $f(\bar{S})$ er en voksende funktion, bliver normalen udadrettet. v. Mises antagelse resulterer altså i en *normalitetsbetingelse*.

Brudfladen indses i øvrigt let at skulle være konveks. Såfremt effekten U udregnes med en anden værdi af spændingsvektoren $\bar{S}_B = \bar{S} + \Delta\bar{S}$, fås

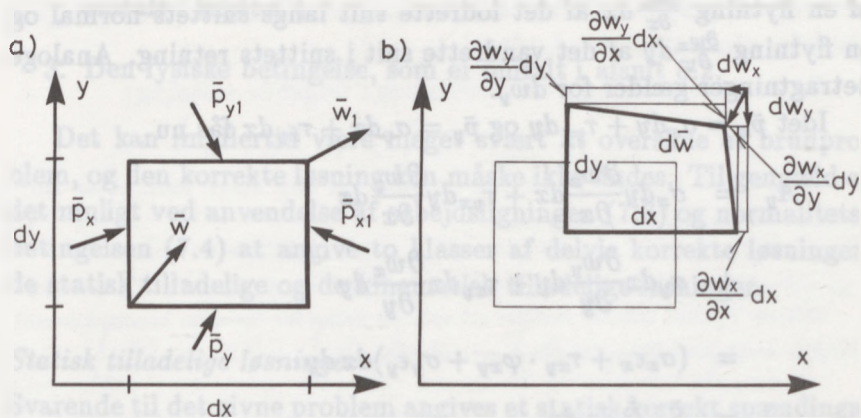
$$U_B = \bar{S}_B \cdot \bar{D} = \bar{S} \cdot \bar{D} + \Delta\bar{S} \cdot \bar{D} < U = \bar{S} \cdot \bar{D}$$

altså må $\Delta\bar{S} \cdot \bar{D}$ være negativ, hvad der ikke er tilfældet ved konkave flader. Med en brudflade som angivet i figur 7.1b er der en entydig sammenhæng mellem \bar{D} og \bar{S} (se fx \bar{D}_A , der må høre til i punkt A). Kendes et legemes deformationstilstand, findes \bar{S} derefter let. Det ses, at \bar{D} 's størrelse er underordnet, men det er retningen, der er afgørende. Derfor sættes $k = 1$ i ligning (7.5).

Da både spændinger og tøjninger transformeres på samme måde, sml. (3.7) og (4.10), gælder normalitetsbetingelsen for vilkårlige snit, ikke blot hovedsnit, som vist i figur 7.1.

7.4 Arbejdslikningen

Arbejdslikningen er en anden vigtig forudsætning for anvendelsen af plasticitetsteorien og skal derfor omtales nærmere, idet der kun



Figur 7.2: Arbejds ligningen. a) før b) efter reduktion

betrages et plant tilfælde. På figur 7.2 ses et lille element, der er påvirket af de ydre kræfter $\bar{p}_x, \bar{p}_y, \bar{p}_{x1}$ og \bar{p}_{y1} .

Punktet (x, y) har fået flytningen \bar{w} og punktet $(x + dx, y + dy)$ har fået flytningen \bar{w}_1 .

Det ydre arbejde defineres da som

$$A_y = (\bar{p}_x + \bar{p}_y) \cdot \bar{w} + (\bar{p}_{x1} + \bar{p}_{y1}) \cdot \bar{w}_1$$

idet $\bar{p}_{x1} = -(\bar{p}_x + d\bar{p}_x)$, $\bar{p}_{y1} = -(\bar{p}_y + d\bar{p}_y)$ og $\bar{w}_1 = \bar{w} - d\bar{w}$ fås efter forkortelse af led af højere orden:

$$A_y = (\bar{p}_x + \bar{p}_y) \cdot \bar{w} - (\bar{p}_x + \bar{p}_y) \cdot \bar{w} - (d\bar{p}_x + d\bar{p}_y) \cdot \bar{w} + (\bar{p}_x + \bar{p}_y) \cdot d\bar{w}$$

De to første led ophæver hinanden. Er legemet i ligevægt, er $d\bar{p}_x + d\bar{p}_y = 0$. Tilbage bliver

$$A_y = (\bar{p}_x + \bar{p}_y) \cdot d\bar{w} = (\bar{p}_x + \bar{p}_y)(d\bar{w}_x + d\bar{w}_y)$$

idet $d\bar{w}_x = \frac{\partial w_x}{\partial x} dx + \frac{\partial w_x}{\partial y} dy$ kan $d\bar{w}_x$ altså betragtes som sammensat af en flytning $\frac{\partial w_x}{\partial x} dx$ af det lodrette snit langs snittets normal og en flytning $\frac{\partial w_x}{\partial y} dy$ af det vandrette snit i snittets retning. Analoge betragtninger gælder for $d\bar{w}_y$.

Idet $\bar{p}_x = \sigma_x dy + \tau_{yx} dy$ og $\bar{p}_y = \sigma_y dx + \tau_{xy} dx$ fås nu

$$\begin{aligned} A_y &= \sigma_x dy \frac{\partial w_x}{\partial x} dx + \tau_{yx} dy \frac{\partial w_x}{\partial x} dx \\ &+ \sigma_y dx \frac{\partial w_y}{\partial y} dy + \tau_{xy} dx \frac{\partial w_x}{\partial y} dy \\ &= (\sigma_x \epsilon_x + \tau_{xy} \cdot \varphi_{xy} + \sigma_y \epsilon_y) dx dy \\ &= \bar{S} \cdot \bar{D} dx dy \end{aligned}$$

Idet det indre arbejde defineres som

$$A_i = (\sigma_x \epsilon_x + \tau_{xy} \varphi_{xy} + \sigma_y \epsilon_y) dx dy$$

fås at det ydre arbejde er lig med det indre.

Betragtes arbejdet på et legeme af vilkårlig form fås arbejds-ligningen

$$\int_F \bar{P} \cdot \bar{w}_p dF + \int_V \bar{G} \cdot \bar{w}_g dV = \int_V \bar{S} \cdot \bar{D} dV \quad (7.6)$$

hvor \bar{P} er overfladelasten i et punkt med bevægelsen \bar{w}_p og \bar{G} er en volumenkraft i et punkt med bevægelsen \bar{w}_g .

Ved udledning af arbejds-ligningen er forudsat, at spændingsfel-tet er i ligevægt.

7.5 Løsningsmetoder

Som før nævnt må en korrekt brudberegning opfylde tre betingelser:

1. Den statiske betingelse eller ligevægtsbetingelsen, som er om-talt i kapitel 3.

2. Den geometriske betingelse (eentydigt bevægelsesfelt), som er omtalt i kapitel 4.
3. Den fysiske betingelse, som er omtalt i afsnit 5.2.

Det kan imidlertid være meget svært at overskue et brudproblem, og den korrekte løsning kan måske ikke findes. Til gengæld er det muligt ved anvendelse af arbejdslikningen (7.6) og normalitetsbetingelsen (7.4) at angive to klasser af delvis korrekte løsninger, de statisk tilladelige og de kinematisk tilladelige løsninger.

Statisk tilladelige løsninger

Svarende til det givne problem angives et statisk korrekt spændingsfelt, der holder ligevægt med de ydre påvirkninger og volumenkræfterne, men som muligvis ikke fremkalder de rigtige deformationer. Brud må ikke overskrides i noget punkt. Såfremt brud ikke er nået i noget punkt, kan alle kræfter og spændinger opproportioneres, indtil brud nås i mindst et punkt. Arbejdslikningen giver nu

$$\int_F \bar{P}^x \cdot \bar{w}_p dF + \int_V \bar{G} \cdot \bar{w}_g dV = \int_V \bar{S}^x \cdot \bar{D} dV$$

idet det er forudsat, at resultatet af beregningen er en statisk tilladelig overfladelast \bar{P}^x , som ikke nødvendigvis er det korrekte \bar{P} , fordi spændingsfeltet symboliseret ved \bar{S}^x 'erne ikke nødvendigvis svarer til det korrekte flytningsfelt symboliseret ved \bar{D} 'erne.

Det indses umiddelbart, at da $\bar{S} \cdot \bar{D}$ i ethvert punkt er maximum, er

$$\int_F \bar{P}^x \cdot \bar{w}_p dF \leq \int_F \bar{P} \cdot \bar{w}_p dF$$

Såfremt \bar{P} og \bar{P}^x udfører et positivt arbejde (fx ved belastning af fundamenter eller ved passivt jordtryk), må \bar{P}^x derfor være mindre end eller lig med \bar{P} .

Såfremt \bar{P} og \bar{P}^x derimod udfører et negativt arbejde (fx ved aktivt jordtryk), må \bar{P}^x være numerisk større end \bar{P} . (Der beregnes altså for stort et aktivt jordtryk.)

De to resultater kan sammenfattes i følgende sætning:

En statisk tilladelig løsning er altid på den sikre side, hvis normalitetsbetingelsen er opfyldt.

Såfremt \bar{P} altid udfører positivt arbejde (fx inden for bærende konstruktioner), forenkles resultatet til den såkaldte nedreværdisætning.

Kinematisk tilladelige løsninger

Svarende til det givne problem, bestemmes et tilladeligt flytningsfelt (en brudmekanisme), der opfylder grænsebetingelserne. Svarende hertil bestemmes et spændingsfelt. Brudbetingelsen opfyldes alle steder, hvor brud er forudsat, men spændingsfeltet er ikke nødvendigvis i ligevægt.

Arbejds ligningen kan altså ikke anvendes. I stedet undersøges uligheden

$$\int_F \bar{P}^x \cdot \bar{w}_p dF + \int_V \bar{G} \cdot \bar{w}_g dV > \int_V \bar{S}^{xx} \cdot \bar{D}^{xx} dV \quad (7.7)$$

hvor det igen for simpelhedens skyld forudsættes, at resultatet skal være en overfladebelastning, symboliseret ved \bar{P}^x . \bar{D}^{xx} 'erne symboliserer det valgte flytningsfelt og \bar{S}^{xx} 'erne det spændingsfelt, der er fundet ved normalitetsbetingelsen. $\bar{S}^{xx} \cdot \bar{D}^{xx}$ er altså maximum i ethvert punkt.

Det kan nu vises, at såfremt uligheden (7.7) gælder, da kan \bar{P}^x ikke bæres af materialet.

Kunne det nemlig bæres, kunne angives et spændingsfelt, symboliseret ved \bar{S}^x , i ligevægt, og arbejds ligningen ville give

$$\begin{aligned} & \int_F \bar{P}^x \cdot \bar{w}_p dF + \int_V \bar{G} \cdot \bar{w}_g dV \\ &= \int_V \bar{S}^x \cdot \bar{D}^{xx} dV < \int_V \bar{S}^{xx} \cdot \bar{D}^{xx} dV \end{aligned}$$

øjensynlig i strid med (7.7).

Anvendes arbejds ligningen alligevel, ville en selv ubetydelig tilvækst i \bar{P}^x betyde, at \bar{P}^x ikke kan bæres af materialet. Derfor er

$$\int_F \bar{P}^x \cdot \bar{w}_p dF + \int_V \bar{G} \cdot \bar{w}_g dV \geq \int_F \bar{P} \cdot \bar{w}_p dF + \int_V \bar{G} \cdot \bar{w}_g dV$$

Igen gælder, at såfremt \bar{P}^x og \bar{P} udfører et positivt arbejde, må \bar{P}^x være større end eller lig med \bar{P} . Udføres derimod et negativt arbejde, vil \bar{P}^x blive mindre end eller lig med \bar{P} (fx aktivt jordtryk). Resultatet kan sammenfattes i sætningen:

en kinematisk tilladelig løsning er altid på den usikre side, hvis normalitetsbetingelsen er opfyldt

Såfremt P 's arbejde altid er positivt, kan resultatet udtrykkes i øvre værdisætningen.

Eentydighedssætningen

Såfremt en løsning er både kinematisk og statisk tilladelig, er den naturligvis korrekt.

Eller sagt på en anden måde: Findes det samme resultat ud fra en statisk eller en kinematisk tilladelig løsning, da er resultatet korrekt.

Kan den korrekte løsning ikke findes, bliver resultatet af de to løsningsmetoder et interval, hvori den korrekte løsning må findes.

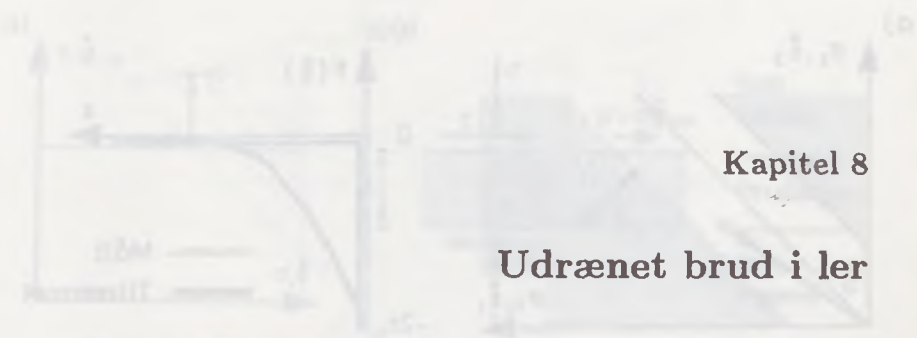
Praktiske fremgangsmåder

Ved *kinematisk tilladelige løsninger* er fremgangsmåden:

- i) Der angives en mulig brudmekanisme.
- ii) Der gøres rede for alle bevægelser i de områder, hvor brud forekommer.
- iii) Idet der indføres en infinitesimal bevægelse, der ikke kan påvirke brudmekanismens geometriske forhold, kan arbejds-ligningen opstilles, og den søgte belastning findes.
- iv) Eventuelt kan indføres een eller flere parametre til beskri-velse af brudmekanismen, og den søgte belastning findes som ekstremumsværdi.

Ved *statisk tilladelige løsninger* er fremgangsmåden:

- i) Der angives en mulig spændingsfordeling i jorden.
- ii) Der gøres rede for spændingerne overalt, og det godtgøres, at brud ikke er overskredet nogen steder.
- iii) Belastningen findes ved en ligevægtsbetragtning.
- iv) Eventuelt kan indføres een eller flere parametre til beskri-velse af spændingsfeltet, og den bedste værdi af belastningen findes som ekstremumsværdi.



Kapitel 8

Udrænet brud i ler

8.1 Indledning

I naturen er ler næsten altid vandmættet, og det er derfor denne tilstand, der betragtes i det følgende. I den udrænedede tilstand kan der da ikke finde volumenændringer sted, fordi de vil kræve bortdræning af vand.

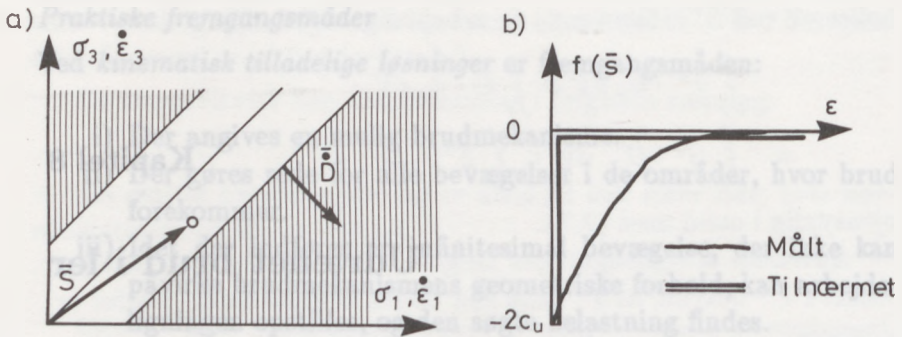
8.2 Spændingstilstande

De mulige spændingstilstande for ler kan findes ved at betragte brudbetingelsen, der for ler i den udrænedede tilstand kan skrives

$$f(\bar{S}) = \sigma_{max} - \sigma_{min} - 2c_u = 0 \tag{8.1}$$

I figur 8.1 a er vist en afbildning af det plane tilfælde af sammenhængen mellem hovedspændingerne. Brudbetingelsen fremstilles her ved to rette linier, der hælder 45 grader og afskærer stykket $2c_u$ af akserne. I isotrop tilstand ses $f(\bar{S})$ at være $-2c_u$.

I figur 8.1 b ses en arbejdskurve for en ler. Den viser, at ler i udrænet tilstand med god tilnærmelse kan regnes plastisk i brud. Leret er dog ikke stift før brud, og det betyder i praksis, at defor-



Figur 8.1: Fysisk betingelse for udrænet brud i ler.

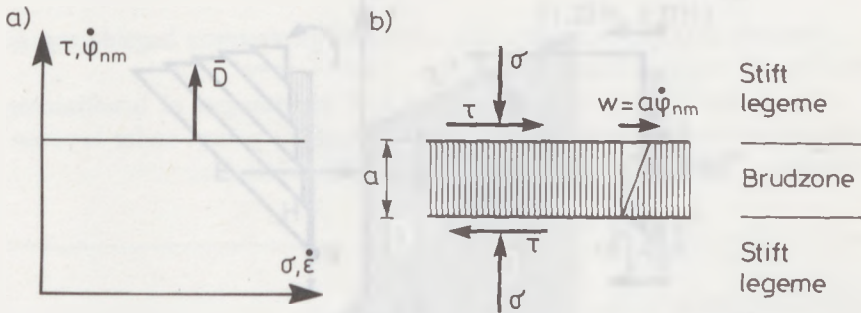
mationerne i de jordtrykspåvirkede konstruktioner kan blive meget store, før jordens styrke er udnyttet.

8.3 Tøjningstilstande

Det kan først undersøges om normalitetsbetingelsen er opfyldt. Her til benyttes ligning (8.1) og (7.5). Det ses, at $\bar{D} = (\dot{\epsilon}_{max}, \dot{\epsilon}_{min}) = (1, -1)$, altså at $\dot{\epsilon}_v = \dot{\epsilon}_{max} + \dot{\epsilon}_{min} = 0$. Da det svarer til udrænet tilstand, er normalitetsbetingelsen opfyldt.

I en kinematisk tilladelig løsning skal bevægelserne være korrekte. Der betragtes i figur 8.2 to stive legemer, der glider på hinanden. I fig. 8.2a er vist brudbetingelsen, der kan skrives $\tau = c_u$. Ved at udnytte normalitetsbetingelsen kan det øvre legemes bevægelse findes. Det bevæger sig $a\phi_{nm}$ i forskydningsspændingens retning, medens komponenten i normalspændingens retning er 0. Den resulterende bevægelse af det øvre legeme går altså langs med snitretningen, og brudzonen udarter til et liniebrud. Liniebruddet er således muligt.

Kendes \bar{D} , kan man ikke finde normalspændingen. Der er in-



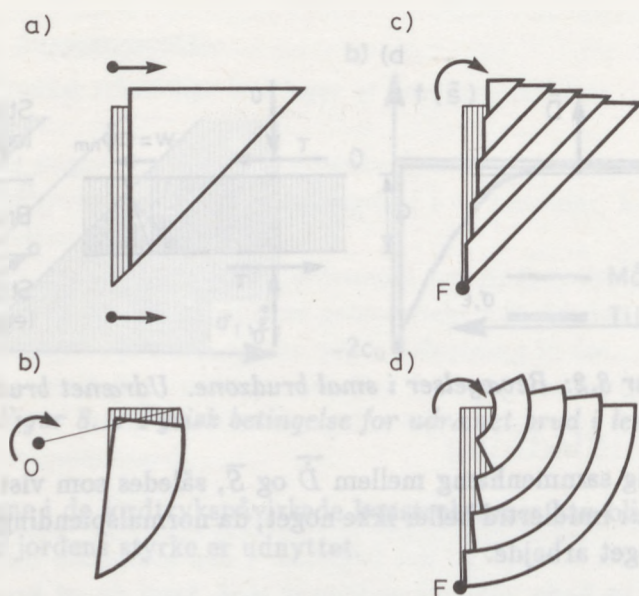
Figur 8.2: Bevægelser i smal brudzone. Udrænet brud.

gen entydig sammenhæng mellem \bar{D} og \bar{S} , således som vist i figur 7.1. Det gør imidlertid heller ikke noget, da normalspændingen ikke udfører noget arbejde.

8.4 Kinematisk tilladelige løsninger

Der skal først angives en brudmekanisme. Den må nødvendigvis bygges op af følgende elementer, der ses i figur 8.3.

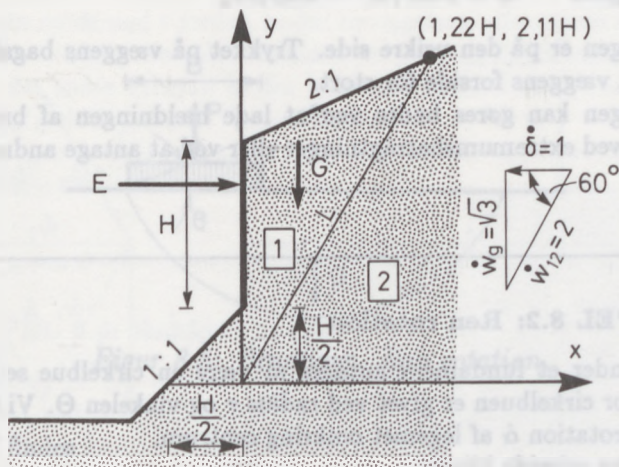
- To stive legemer, der er adskilt af en ret linie.
- To stive legemer, der er adskilt af en cirkelbue.
- Et legeme, hvor begrænsningen (her lodret) roterer om fodpunktet F . Der forekommer heri brud langs med uendelig mange rette linier. Bruddet kaldes et zonebrud. Rotationspunktet kan ikke ligge over fodpunktet, da τ ikke kan skifte fortegn i brudzonen. Derimod kan bruddet kombineres med en forskydning i randen, svarende til a), men denne forskydning skal også gå samme vej som de øvrige forskydninger i zonen. Det øjeblikkelige omdrejningspunkt skal altså ligge under fodpunktet F .



Figur 8.3: Byggeklodser i kinematisk tilladelige løsninger. Udrænnet brud i ler. a) Liniebrud ved translation af væg. b) Liniebrud ved rotation om O . c) og d) Zonebrud ved rotation om fodpunkt F .

- d) Et legeme, hvor begrænsningen (her lodret) roterer om fodpunktet F , men hvor brudlinierne er cirkulære. Bruddet kaldes igen for et zonebrud. Som før kan det overlejres af en randforskydning, svarende til b, og med en retning, der får omdrejningspunktet til at ligge under F . I dette tilfælde forekommer en singularitet ved centrum. Der kan altid ses bort fra en singularitet, fordi man kun begår en fejl, der er lille af højere orden. På figuren skæres øverste legeme væk.

I det følgende vil blive givet en række eksempler på anvendelsen af ovennævnte elementer.



Figur 8.4: Byggegrubeindfatning.

EKSEMPEL 8.1: Afstivning af lodret væg

En lodret, glat væg skal afstives (figur 8.4). Det ønskes beregnet, hvor stor afstivningskraften E skal være.

En simpel brudmekanisme består af et retlinet brud på væggenes bagside, dannende vinklen 60° med vandret. På væggenes forside antages bruddet at være vandret.

Væggen antages at parallelforskydes $\delta = 1$ i vandret retning. Foran væggen er alle bevægelser vandrette og af størrelsen 1. Her udfører egenvægten ikke noget arbejde. Bag væggen opløses den vandrette bevægelse $\delta = 1$ i en lodret bevægelse af jordlegemet $\dot{w}_g = \sqrt{3}$ og en forskydning i brudlinien på $\dot{w}_{12} = 2$.

Arbejds ligningen kan nu opstilles:

$$-E \cdot 1 + G \cdot \sqrt{3} = 2c_u L + c_u \cdot H/2$$

$$\text{der giver } E = 1.58 \gamma H^2 - 4.38 H c_u$$

Løsningen er på den usikre side. Trykket på væggens bagside regnes for lille, på væggens forside for stort.

Løsningen kan gøres bedre ved at lade hældningen af brudlinierne bestemmes ved ekstremumsbetragtninger eller ved at antage andre brudmekanismer.

EKSEMPEL 8.2: Ren rotation

Bruddet under et fundament antages at være en cirkelbue se figur 8.5. Centrum for cirkelbuen er givet ved radius r og vinkelen Θ . Vi tænker os nu en lille rotation $\dot{\alpha}$ af legemet omkring centrum.

Det ydre arbejde bliver

$$U_y = P(r \cos\Theta - \frac{1}{2} B) \dot{\alpha}$$

det indre arbejde bliver

$$U_i = c_u(\pi - 2\Theta) r \cdot r \dot{\alpha}$$

eller

$$P = \frac{(\pi - 2\Theta)r^2}{r \cos\Theta - \frac{1}{2} B} c_u$$

Den mindste af de øvre værdier må naturligvis være den bedste.

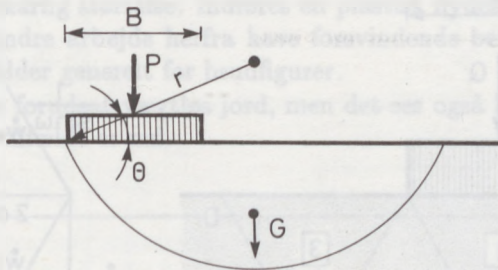
$$\frac{\partial P}{\partial r} = 0 \rightarrow 2r(r \cos\Theta - \frac{1}{2} B)(\pi - 2\Theta) - (\pi - 2\Theta) r^2 \cdot \cos\Theta = 0$$

$$\rightarrow B = r \cos\Theta$$

Centrum ligger altså på fundamentskant.

$$\frac{\partial P}{\partial \Theta} = 0 \rightarrow -2(r \cos\Theta - \frac{1}{2} B) + (\pi - 2\Theta)r \sin\Theta = 0$$

$$\rightarrow \cot\Theta = (\pi - 2\Theta)$$



Figur 8.5: Brudfigur. Ren rotation.

Heraf findes

$$P = \frac{2 \cot \Theta \cdot r^2}{r \cos \Theta} c_u = \frac{4B}{\sin 2\Theta} c_u$$

Idet Θ findes til 23.2° fås

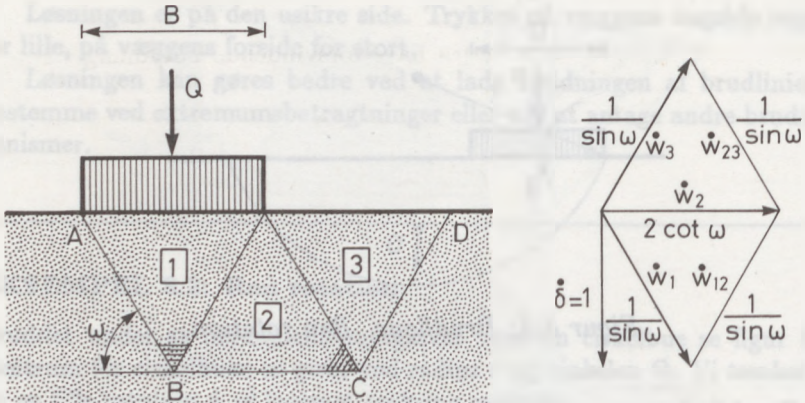
$$b = \frac{P}{B} = 5.53 c_u$$

I ovennævnte beregninger er forudsat vægtløs jord. Det har nu ingen betydning, fordi jordoverfladen er vandret. Jordlegemets tyngdepunkt får da en vandret flytning, og volumenarbejdet er nul.

EKSEMPEL 8.3: Ren translation.

Det samme problem kan også undersøges for ren translation ved fx at antage en brudfigur som vist på figur 8.6. Den består af 3 ligebenede trekanter, der glider på hinanden. Der er to singulariteter, der er vist skraveret. Når man forestiller sig en bevægelse, skæres de to områder væk. Vinklen ω findes senere ved at bruge ekstremumsbetingelsen. Vi vil anvende en minimumsbetingelse, og lader derfor vinklen ω variere.

Fundamentet antages at få den lodrette bevægelse 1 og vil sammen med $\boxed{1}$ bevæge sig $1/\sin\omega$ langs AB. $\boxed{2}$ bevæger sig naturligvis i retning



Figur 8.6: Brudfigur. Ren Translation.

BC . Størrelsen af bevægelsen er givet af, at den indbyrdes forskydning mellem $\boxed{1}$ og $\boxed{2}$ skal have skilleliniens retning. (Se figur 8.6). På denne måde kan hele hastighedsfeltet konstrueres.

Idet længden af liniestykkerne let findes ved geometriske betragtninger, fås det indre arbejde

$$U_{AB} = U_{DC} = c_u \cdot \frac{B}{2} \cdot \frac{1}{\cos \omega} \cdot \frac{1}{\sin \omega}$$

$$U_{BC} = c_u \cdot B \cdot 2 \cot \omega$$

$$U_{1-2} = U_{2-3} = U_{AB}$$

og dermed arbejdslikningen

$$Q \cdot 1 = 2Bc_u \left(\cot \omega + \frac{2}{\sin 2\omega} \right)$$

Ved at differentiere Q med hensyn til ω findes den værdi $\omega = 54.8^\circ$, der giver minimum arbejde, og heraf fås

$$b = 5.65 c_u$$

Er en sådan brudfigur nu kinematisk tilladelig? Det stive legeme 1 maser jo sin spids ned i jorden under bevægelsen. Hertil må svares, at δ er en fiktiv, vilkårlig størrelse. Indføres en plastisk flydezone i trekantens spids, vil det indre arbejde herfra have forsvindende betydning. Denne betragtning gælder generelt for brudfigurer.

Der er igen forudsat vægtløs jord, men det ses også her, at volumenarbejdet i alle tilfælde er nul.

EKSEMPEL 8.4: Rankine brud.

Der betragtes nu det element, der er vist i figur 8.7 a). For simpelheds skyld er det vist lidt anderledes, men det fremkommer som halvdelen af figur 8.3. c) og drejet således at begrænsningen bliver vandret.

Brudmekanismen kan antages at være uendelig mange, uendeligt tynde vandrette strimler, der glider på hinanden. Brudbetingelsen må altså være opfyldt i ethvert indre punkt, og den er endvidere opfyldt langs væggen. Strimlerne må derfor være vandrette. Bruddet kaldes et zonebrud, benævnt Rankine-brud efter den første, der anvendte det.

Væggen tænkes at dreje sig vinklen α om fodpunktet F . I afstanden a fra fodpunktet ligger en strimmel med bredden da omgivet af andre strimler med samme lille bredde. De indbyrdes flytninger koncentrerer sig til liniebrud mellem strimlerne. Er vinkeldrejningen α bliver den indbyrdes flytning

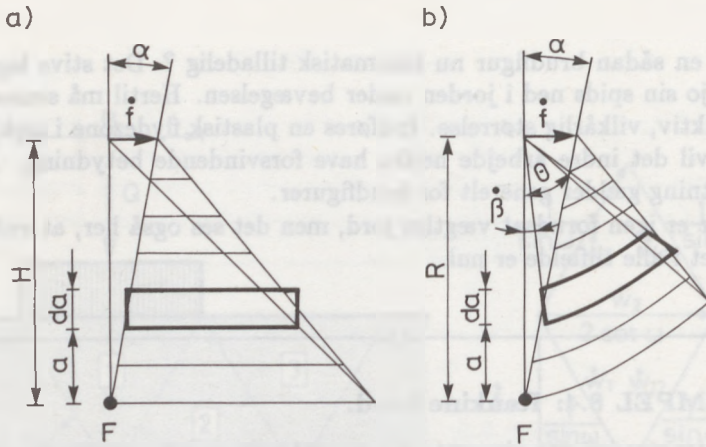
$$df_a = \alpha da$$

Varierer c_u langs med liniebruddet bliver tilvæksten i arbejdet pr. længdeenhed:

$$\frac{dU_z}{da} = \int_0^{H-a} c_u \alpha dl = \alpha \int_0^{H-a} c_u dl$$

og dermed

$$U_z = \int_0^H dU_z = \alpha \int_0^H \int_0^{H-a} c_u dl da \quad (8.2)$$



Figur 8.7: a) Rankine brud. b) Prandtl-brud.

Beregningen foretages let numerisk. Det er styrken ved kinematisk tilladelige løsninger, at en variation i c_u indregnes så simpelt.

Er c_u konstant, gennemføres integrationen let

$$U_s = \frac{1}{2} \alpha c_u H^2 = \frac{1}{2} c_u \dot{f} H \quad (8.3)$$

idet bevægelsen af toppunktet $\dot{f} = \alpha H$ er indført.

EKSEMPEL 8.5: Prandtl brud.

Der betragtes det element, der er vist i figur 8.3 d) og igen i figur 8.7 b). Der er rotation om fodpunktet F . Drejningsvinklen kaldes α og elementets topvinkel er θ . Jorden antages for simpelhedens skyld at være vægtløs, men der ses ingen teoretiske vanskeligheder ved tung jord.

Brudmekanismen antages at være uendelig mange, uendelig tynde, delcirkelformede strimler, der glider på hinanden. Brudbetingelsen er da opfyldt i ethvert indre punkt i bruddet. Brudzonens toppunkt er en singularitet. Denne type er først gennemregnet af Prandtl. De indbyrdes flytninger antages koncentreret til de (uendeligt) mange liniebrud.

En strimmel skal altså forskyde sig αa i forhold til fodpunktet F .

Forskydningen fremkommer ved rotation om toppunktet 0. Vinkeldrejningen bliver derfor

$$\dot{\beta} = \alpha \frac{a}{R-a}$$

Forskellen i vinkeldrejning mellem to strimler bliver

$$d\dot{\beta} = \alpha \cdot \frac{R}{(R-a)^2} da$$

og forskydningen mellem strimlerne

$$df_a = (R-a) \cdot d\dot{\beta} = \frac{\alpha R}{R-a} da$$

Forskydningen bliver uendelig for a gående mod R , altså i singulariteten.

Variere c_u langs med liniebruddet, bliver tilvæksten i arbejdet pr. længdeenhed

$$\frac{dU_z}{da} = \alpha \int_0^\theta c_u \frac{R}{R-a} \cdot (R-a) d\theta$$

og dermed

$$U_z = \alpha R \int_0^R \int_0^\theta c_u d\theta da \quad (8.4)$$

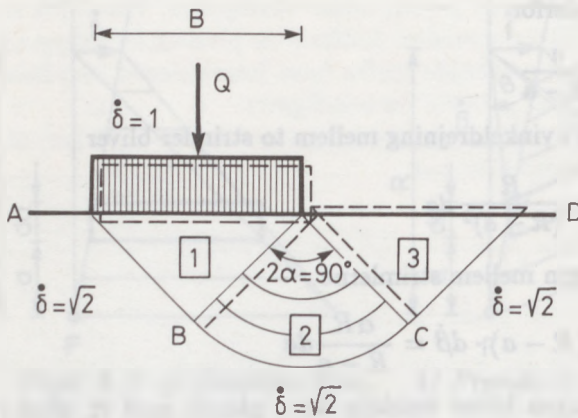
Er c_u konstant fås

$$U_z = \alpha c_u \theta R^2 = c_u \dot{f} \theta R \quad (8.5)$$

idet bevægelsen af toppunktet $\dot{f} = \alpha R$ er indført.

EKSEMPEL 8.6: Kombineret brud.

Et kombineret brud ses på figur 8.8. Igen betragtes vægtløs jord, men det har ingen betydning. Brudfiguren består af to stive legemer, 1 og 3. Det mellemliggende område 2 kan ikke være stift, da der så ville blive



Figur 8.8: Kombineret brud (korrekt løsning).

sprækker og overlapninger. Det er en Prandtl-zone, der skal overføre en parallelbevægelse i een retning til en parallelbevægelse vinkelret herpå.

Gives fundamentet sætningen $\delta = 1$, fås bevægelsen $\delta = \sqrt{2}$ langs randen, og randarbejdet U_r bliver da

$$U_r = \sqrt{2} c_u \left(\frac{B\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{2} \cdot \frac{B\sqrt{2}}{2} + \frac{B\sqrt{2}}{2} \right) = \left(\frac{\pi}{2} + 2 \right) B c_u$$

I zonen må toppunktet bevæges $\sqrt{2}$ og zonestarbejdet U_z fås af (8.5)

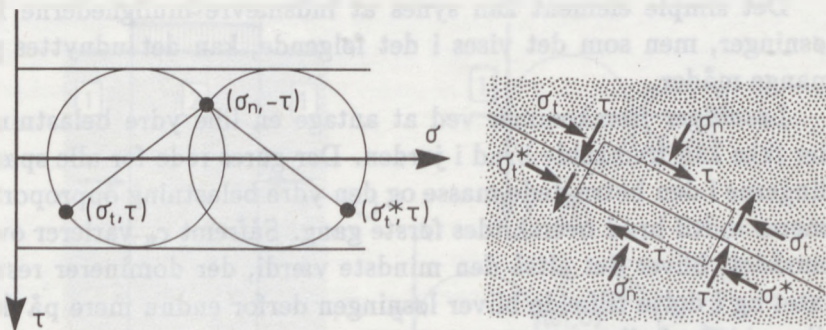
$$U_z = \frac{\pi}{2} \cdot c_u \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{B\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{2} B c_u$$

Arbejdslikningen giver nu

$$Q \cdot 1 = (\pi + 2) B c_u \quad \text{eller} \quad b = \frac{Q}{B} = (\pi + 2) c_u$$

Samme bæreevne opnås med en symmetrisk brudfigur, opnået ved spejling om centerlinjen.

Den samme værdi kan også findes af en statisk tilladelig brudfigur. Løsningen er korrekt.



Figur 8.9: Diskontinuert spændingsfelt

I opgaverne ses en lang række eksempler på andre kombinerede brudfigurer.

8.5 Statisk tilladelige løsninger

I de kinematisk mulige løsninger kunne forekomme diskontinuiteter i hastighedsfeltet langs brudlinierne. Man kan også tillade diskontinuiteter i spændingsfeltet. Blot må ligevægten af et vilkårligt lille element i grænsefladen være opfyldt. (Se figur 8.9.) Det betyder, at σ_n og τ må være ens, medens σ_t kan variere. Den maksimale ændring i σ_t fås, såfremt der er brudtilstand på begge sider af grænsefladen.

Elementet i en statisk tilladelig løsning udgøres af et spændingsbånd af uendelig længde. Det bliver derfor muligt at redegøre

for spændingerne i ethvert punkt af den betragtede masse. I stedet for at opstille ligevægtsligningerne for ethvert delområde anvendes Mohrs cirkler, der også sikrer ligevægt.

Det simple element kan synes at indsnævre mulighederne for løsninger, men som det vises i det følgende, kan det udnyttes på mange måder.

Løsninger fremkommer ved at antage en lille ydre belastning, der ikke kan fremkalde brud i jorden. Der gøres rede for alle spændingerne i den betragtede masse og den ydre belastning opproportioneres indtil brud overskrides første gang. Såfremt c_u varierer over området, bliver det altså den mindste værdi, der dominerer resultatet og i dette tilfælde bliver løsningen derfor endnu mere på den sikre side end ellers.

EKSEMPEL 8.7: Eet spændingsbånd.

Bæreevne af et fundament på ler ønskes beregnet. Spændingsfeltet antages at være et lodret spændingsbånd med samme bredde som fundamentet (figur 8.10). Område 1 er spændingsløs. I båndet er brud overalt. Spændingsfeltet gør rede for spændingerne overalt i jordmassen (figur 8.10 b).

Bæreevne bliver

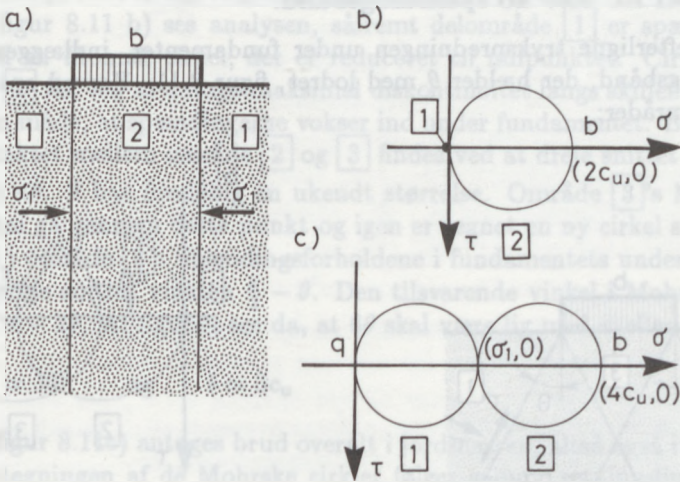
$$b = 2c_u$$

og det er naturligvis på den sikre side. (Sml. eksempel 8.6)

Samme opbygning af spændingsfeltet kan benyttes, men områderne 1 og 2 kan begge antages i brudtilstand. En spændingsdiskontinuitet forekommer på grænsen mellem 1 og 2. Efter analyse af spændingsfeltet (figur 8.10 c) ses bæreevnen at være

$$b = 4c_u$$

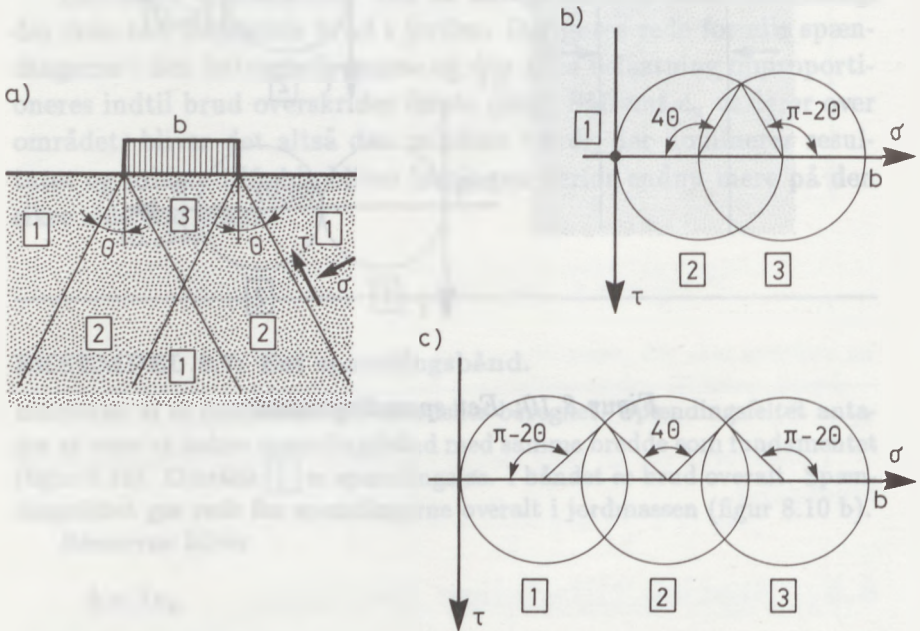
der selvfølgelig også er på den sikre side.



Figur 8.10: Eet spændingsbånd.

EKSEMPEL 8.8: To spændingsbånd.

For at efterligne trykspredningen under fundamenter, indlægges nu to spændingsbånd, der hælder θ med lodret, figur 8.11. Herved opstår følgende områder:



Figur 8.11: To spændingsbånd.

Område **1**, der antages spændingsløst.

Område **2**, der udgøres af båndene, hvor de ikke overlapper hinanden.

Område **3**, der udgøres af det område, hvor båndene overlapper hinanden.

Der skal nu gennemføres en spændingsanalyse af alle områder i den betragtede jordmasse. Det kan gennemføres ved at foretage beregninger af hver dels ligevægt, fx ved lodrette og vandrette projektioner for hvert

delelement og i dette eksempel naturligvis først og fremmest for delområde [3]. Det gennemføres imidlertid langt lettere med Mohrs cirkler for spændinger, der jo blot er ligevægtsligningerne udtrykt grafisk.

På figur 8.11 b) ses analysen, såfremt delområde [1] er spændingsløst med en Mohrske cirkel, der er reduceret til nulpunktet. Cirklen for område [2] fås ved at antage maksimal diskontinuitet langs skillefladen på en sådan måde, at spændingerne vokser ind under fundamentet. Begrænsningspunktet mellem område [2] og [3] findes ved at dreje snittet 2θ eller i cirklen 4θ . θ har foreløbig en ukendt størrelse. Område [3]'s Mohrske cirkel skal gå gennem dette punkt og igen er tegnet en ny cirkel svarende til brud i område [3]. Spændingsforholdene i fundamentets underside fås ved at dreje snittet vinklen $\frac{\pi}{2} - \theta$. Den tilsvarende vinkel i Mohrs cirkel er altså $\pi - 2\theta$. Af figuren ses da, at 6θ skal være lig med π eller

$$\theta = 30^\circ \quad \text{og} \quad b = 3c_u$$

På figur 8.11c) antages brud overalt i jordmassen, altså også i område [1]. Optegningen af de Mohrske cirkler følger samme retningslinier som før. Det ses, at 8θ skal være lig med π . Heraf fås

$$2\theta = 45^\circ \quad \text{og} \quad b = (2 + 4 \cdot \cos 45^\circ)c_u = 4.83c_u$$

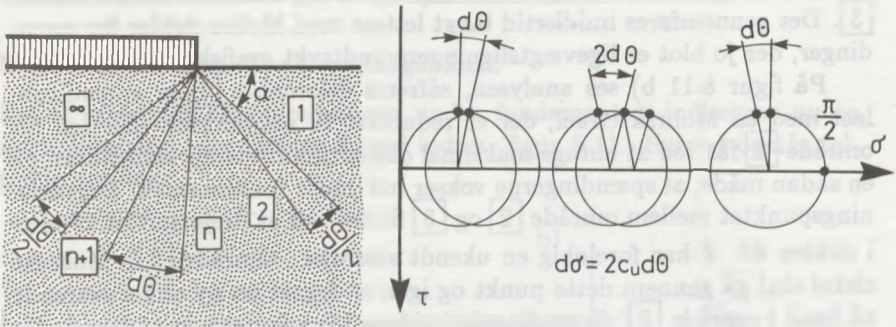
EKSEMPEL 8.9: Uendeligt mange spændingsbånd.

Løsningen fra eksempel 8.8 udvides let til at omfatte uendelig mange spændingsbånd, se figur 8.12.

Det bemærkes først, at såfremt vinklen α i område [1] er 45° vil spændingerne være ens på begge sider af den nedre skrå begrænsning. Er α mindre end 45° kan spændingerne aftage ind under fundamentet. Det antages derfor at

$$\alpha = 45^\circ + \frac{1}{2} d\theta$$

hvor $d\theta$ er en positiv vinkel. For at gøre figuren overskuelig betragtes nu en overgang mellem spændingsbånd n og $n + 1$, hvor vinklen er drejet $d\theta$.



Figur 8.12: Uendelig mange spændingsbånd.

Det ses, at buelængden mellem punkterne svarende til de to snit er $2d\theta \cdot c_u$ og er $d\theta$ lille, bliver tilvæksten i middelspændingen $d\sigma_c$.

$$d\sigma_c = 2c_u d\theta \quad (8.6)$$

$$\text{eller } \Delta\sigma_c = 2c_u \Delta\theta \quad (8.7)$$

Bæreevnen bliver da

$$b = 2c_u + 2c_u \Delta\theta = (\pi + 2)c_u \quad (8.8)$$

idet $\Delta\theta$ er lig med $\pi/2$.

Dette resultat er nøjagtig det samme som opnået ved den kinematisk tilladelige metode i eksempel 8.6. Derfor er resultatet korrekt.

Som et kuriosum kan bemærkes, at resultatet er korrekt, men det er løsningsmetoden ikke. Spændingerne vil naturligvis aftage med voksende afstand til fundamentet, undtagen i et mindre område i nærheden af fundamentet, svarende til brudfiguren i figur 8.8.

8.6 Sammenligning af metoderne

Den kinematisk tilladelige metode anvender arbejdsligningen og kan anvendes til at finde en resulterende kraft, men ikke en spændingsfordeling. Til gengæld kan den bruges, selv om jorden har varierende styrke. Der skal da blot udføres en integration over hele området, eventuelt ved numerisk beregning. Den farligste brudfigur vil i hovedsagen gå igennem de svageste områder i den betragtede masse.

Den statisk tilladelige metode går i princippet ud på at finde en fordeling af spændingerne, som er i ligevægt, og hvor brud ikke overskrides i noget punkt. Derefter opproportioneres spændingerne indtil brud indtræder eet sted i jordmassen, dvs. i det svageste område. En statisk tilladelig metode vil derfor yderligere komme på den sikre side, hvis jordens styrke varierer. Det er naturligvis en svaghed ved metoden. Til gengæld kan spændingsfordelingen findes.

8.8. Bemærkninger til metoden

Den hidtilværende metode er baseret på antagelsen om, at den udrænet brud i ler optræder som en plan. Dette er dog ikke altid tilfældet, og der kan være behov for at tage hensyn til den faktiske brudform. I denne forbindelse er det vigtigt at bemærke, at den hidtilværende metode kun er gyldig, hvis bruddet er plan og udrænet. Hvis bruddet er krum eller ikke udrænet, vil metoden give forkerte resultater. Derfor er det nødvendigt at undersøge brudformen grundigt, før man anvender metoden. Dette kan gøres ved at tage billeder af bruddet og måle den faktiske brudform. Hvis bruddet er krum, kan man bruge en anden metode til at bestemme brudvinklen. Hvis bruddet ikke er udrænet, kan man bruge en anden metode til at bestemme brudvinklen. Det er vigtigt at være opmærksom på disse forhold, når man anvender metoden.

$$\sigma_1 = \sigma_3 + \frac{2c}{\tan \phi} \quad (8.6)$$

$$\sigma_3 = \sigma_1 - \frac{2c}{\tan \phi} \quad (8.7)$$

Dermed er

$$\sigma_1 = \sigma_3 + \frac{2c}{\tan \phi} \quad (8.8)$$

Den hidtilværende metode er baseret på antagelsen om, at den udrænet brud i ler optræder som en plan. Dette er dog ikke altid tilfældet, og der kan være behov for at tage hensyn til den faktiske brudform. I denne forbindelse er det vigtigt at bemærke, at den hidtilværende metode kun er gyldig, hvis bruddet er plan og udrænet. Hvis bruddet er krum eller ikke udrænet, vil metoden give forkerte resultater. Derfor er det nødvendigt at undersøge brudformen grundigt, før man anvender metoden. Dette kan gøres ved at tage billeder af bruddet og måle den faktiske brudform. Hvis bruddet er krum, kan man bruge en anden metode til at bestemme brudvinklen. Hvis bruddet ikke er udrænet, kan man bruge en anden metode til at bestemme brudvinklen. Det er vigtigt at være opmærksom på disse forhold, når man anvender metoden.

Drænet brud i rent friktionsmateriale

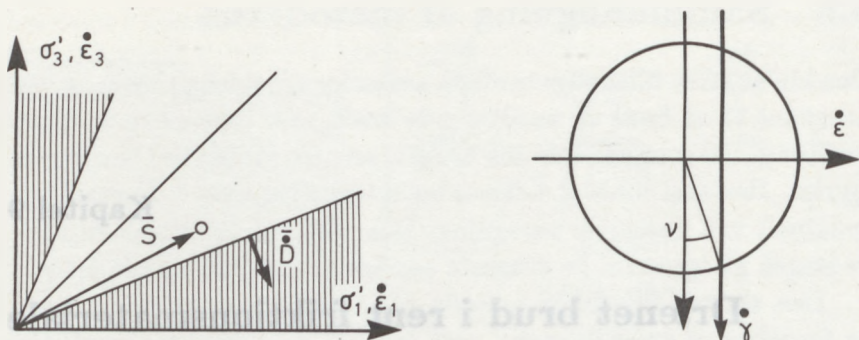
9.1 Spændingstilstande

De mulige spændingstilstande for et rent friktionsmateriale er vist i figur 9.1, der gælder for det plane tilfælde. Spændingstilstanden kan beskrives ved

$$f(\bar{S}) = (1 - \sin\varphi')\sigma'_{max} - (1 + \sin\varphi')\sigma'_{min} = 0 \quad (9.1)$$

I et indre af området er $f(\bar{S})$ som sædvanlig mindre end nul. I den isotrope tilstand er $f(\bar{S})$ således lig med $-2\sigma'\sin\varphi'$. I brud er $f(\bar{S}) = 0$. Brudbetingelsen fremstilles ved to rette linier, der går gennem nulpunktet.

Arbejdskurven for sand udviser ikke nogen plastisk tilstand, hvor tøjningen forløber uafhængig af spændingerne, undtagen for meget store tøjninger i den såkaldte residuelle tilstand, hvor sandet er kraftigt svækket. Normalt tages svækkelsen ikke med i regning, men beregningerne kan dog gennemføres med de såkaldte residuelle parametre. Arbejdskurven har derimod for relativt små tøjninger et udtalt maksimum, svarende til den maksimalt opnåelige friktionsvinkel, der normalt lægges til grund for en brudberegning.



Figur 9.1: Fysisk betingelse for drænet brud. $c' = 0$.

9.2 Tøjningstilstande

Normalitetsbetingelsen betyder, at \bar{D} står vinkelret på \bar{S} i brud, se figur 9.1. Det betyder, at det indre arbejde antages at være 0! Arbejdslikningen bliver altså

$$\int_F \bar{P} \cdot \bar{w}_p dF + \int_V \bar{G} \cdot \bar{w}_g dV = 0 \quad (9.2)$$

Det kan naturligvis ikke være tilfældet. Friktion må give anledning til ekstra arbejde til varmeudvikling. Man må derfor enten forkaste normalitetsbetingelsen eller også finde en passende måde at tage hensyn til det indre arbejde på. Dette punkt diskuteres i afsnit 9.6.

Det skulle altså i følge formel (9.2) forventes, at det var langt lettere at udføre kinematisk tilladelige beregninger for et friktionsmateriale; det indre arbejde udgår jo. Men det viser sig at geometrien bliver mere kompliceret, og beregningsarbejdet bliver omtrent det samme.

Af formlerne (9.1) og (7.5) fås nu

$$\bar{D} = (\dot{\epsilon}_{max}, \dot{\epsilon}_{min}) = (1 - \sin\phi', -1 - \sin\phi')$$

Mohrs cirkel for tøjninger kan optegnes som vist på figur 9.1. Det ses at

$$\sin \nu = \frac{-(\dot{\epsilon}_{max} + \dot{\epsilon}_{min})}{\dot{\epsilon}_{max} - \dot{\epsilon}_{min}} = \sin \varphi' \quad (9.3)$$

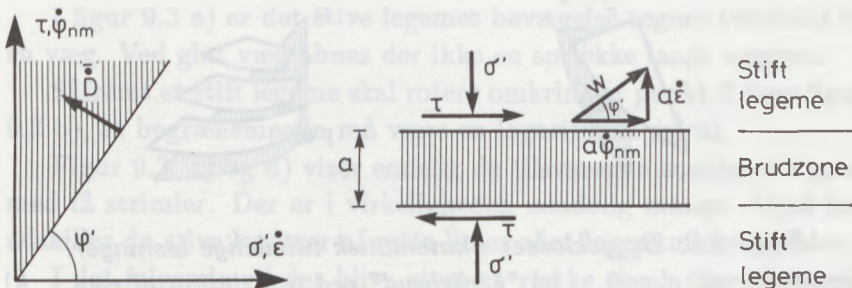
Det svarer til at materialet udvider sig i brud.

Normalitetsbetingelsen betyder altså, at $\nu = \varphi'$.

Det energitab, der skyldes udvikling af friktionsvarme, vil slå igennem på laboratoriemålinger, hvor ν altid måles mindre end φ' . ν andrager højst det halve af φ' og ofte er ν meget mindre. I den residuelle tilstand er den 0.

Forholdet mellem φ' og ν er omtalt nøjere i afsnit 9.5.

9.3 Kinematisk tilladelige løsninger



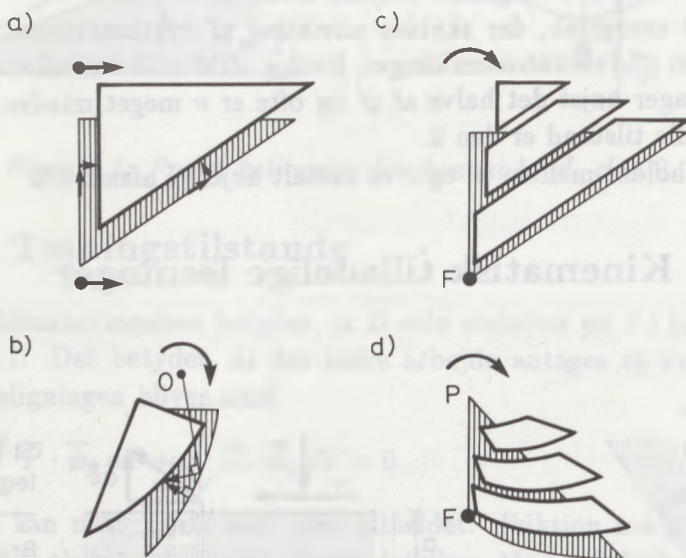
Figur 9.2: Bevægelser i smal brudzone. Drænet brud. $c' = 0$.

På figur 9.2 ses brudbetingelse i et τ, σ' -diagram med den tilhørende tøjningsvektor ($\dot{\varphi}_{nm}, \dot{\epsilon}$).

$$\overline{D} = (\dot{\epsilon}, \dot{\varphi}_{nm}) = k(-\tan \varphi', 1) \quad (9.4)$$

Læg mærke til at φ_{nm} er vinkelændringen defineret ved (4.7). Friktionsvinklen angives med effektiv og mærke.

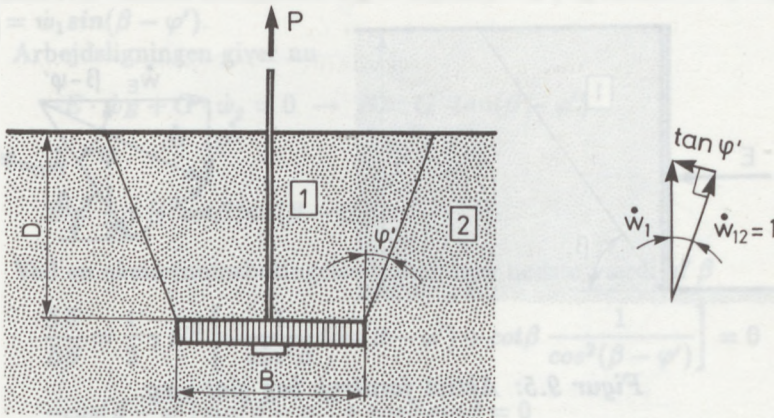
Figuren viser da, at en forskydning i τ 's retning betyder, at det stive legeme forskydes bort fra det legeme det glider på, og at vinklen mellem de to bevægelser netop er φ' .



Figur 9.3: Byggeklodser i kinematisk tilladelige løsninger. Drænet brud. $c' = 0$. a) "Liniebrud" ved translation af væg. b) "Liniebrud" ved rotation af væg. c) og d) Zonebrud ved rotation om fodpunkt F.

De to legemer adskilles, hvorved det bliver plads til volumenudvidelsen.

En kinematisk tilladelig brudmekanisme kan opbygges af de elementer, der er vist i figur 9.3. a) og b) viser to stive legemer der glider på hinanden, men, som det skal vises, må de nødvendigvis



Figur 9.4: Optrækning af lodret anker.

være adskilt af smalle brudzoner og ikke liniebrud som ved ler.

I figur 9.3 a) er det stive legemes bevægelse tegnet svarende til ru væg. Ved glat væg åbnes der ikke en sprække langs væggen.

Såfremt et stift legeme skal rotere omkring et punkt O viser figur 9.3 b), at begrænsningen må være en logaritmisk spiral.

Figur 9.3 c) og d) viser endelig de tilsvarende zonebrud tegnet med få strimler. Der er i virkeligheden uendelig mange. Også her adskilles de stive legemer af rette linier eller logaritmiske spiraler.

I det følgende vil der blive givet en række eksempler på anvendelse af disse elementer.

EKSEMPEL 9.1: Ren translation.

En vandret liggende plade skal optage en lodret opadrettet kraft P (se figur 9.4). Hvor stor må P forudses at blive?

En kinematisk tilladelig løsning opnås ved at antage to rette brudlinier



Figur 9.5: Aktivt jordtryk bag glat væg.

fra pladens kanter til jordoverfladen. Tænkes en forskydning $\delta = 1$ i brudliniens retning, vil der på tværs af brudlinien ske en bevægelse på $\tan\varphi'$. Bevægelsen af legeme $\boxed{1}$ vil danne vinklen φ' med brudlinien. Da legemets bevægelse er lodret, må brudlinien danne vinklen φ' med lodret.

Herefter giver arbejdslikningen

$$P \cdot \dot{w}_1 - G \cdot \dot{w}_1 = 0$$

$$P = G = \gamma D (B + D \tan\varphi')$$

Da løsningen er på den usikre side, beregnes P for stor.

EKSEMPEL 9.2: Ren translation af væg. (Aktivt brud)

Der betragtes en glat væg, og det ønskes beregnet, hvilken vandret afstivningskraft, der er nødvendig for at understøtte væggen. Jordens rumvægt er γ .

Der antages igen en brudmekanisme bestående af en ret brudlinie der hælder β med vandret (figur 9.5). Såfremt bevægelsen \dot{w}_{12} i brudliniens retning er 1, bliver bevægelsen af det stive legeme $\boxed{1}$ $\dot{w}_1 = 1/\cos\varphi'$. Bevægelsesvektoren danner vinklen $\beta - \varphi'$ med vandret. Bevægelsen kan

opløses i en vandret komponent $\dot{w}_E = \dot{w}_1 \cos(\beta - \varphi')$ og en lodret bevægelse $\dot{w}_g = \dot{w}_1 \sin(\beta - \varphi')$.

Arbejds ligningen giver nu

$$-E \cdot \dot{w}_E + G \cdot \dot{w}_g = 0 \rightarrow E = G \cdot \tan(\beta - \varphi')$$

eller

$$E = \frac{1}{2} \gamma H^2 \cot \beta \tan(\beta - \varphi') \quad (9.5)$$

Ved en ekstremumsbetingelse bestemmes bedste værdi af β

$$\frac{\partial E}{\partial \beta} = \frac{1}{2} \gamma H^2 \left[-\frac{1}{\sin^2 \beta} \tan(\beta - \varphi') + \cot \beta \frac{1}{\cos^2(\beta - \varphi')} \right] = 0$$

$$-\cos(\beta - \varphi') \sin(\beta - \varphi') + \cos \beta \sin \beta = 0$$

$$\sin(2\beta - 2\varphi') = +\sin 2\beta \rightarrow \beta = 45 + \frac{\varphi'}{2}$$

og heraf

$$E = \frac{1}{2} \gamma H^2 \tan^2 \left(45 - \frac{\varphi'}{2} \right) \quad (9.6)$$

E er på den usikre side, altså for lille.

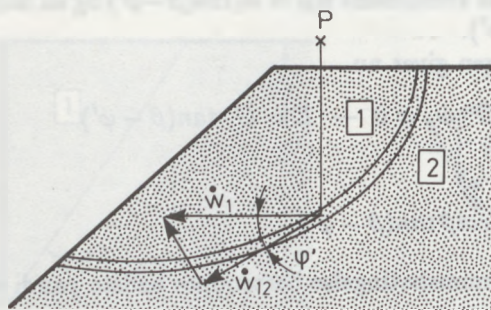
I "Lærebog i Geoteknik" regnes φ' med fortegn i kapitel 11, idet φ' er negativ i det aktive tilfælde. Der er altså overensstemmelse med dette udtryk.

EKSEMPEL 9.3: Ren rotation

Der betragtes stabiliteten af en skråning. Brudmekanismen antages at bestå af et stift legeme, der roterer om polen P (figur 9.6). Er forskydningen i brudliniens retning \dot{w}_{12} , må bevægelsen \dot{w}_1 af det stive legeme danne vinklen φ' med \dot{w}_{12} . Begrænsningen mellem de to stive legemer må være en logaritmisk spiral med pol i punkt P .

En sådan logaritmisk spiral har som bekendt ligningen

$$r_1 = r_0 e^{(v_1 - v_0) \tan \varphi'}$$



Figur 9.6: Undersøgelse af stabilitet.

Den sædvanlige stabilitetsundersøgelse er altså kinematisk tilladelig og dermed på den usikre side.

Arbejdslikningen giver i dette tilfælde, såfremt der er brud:

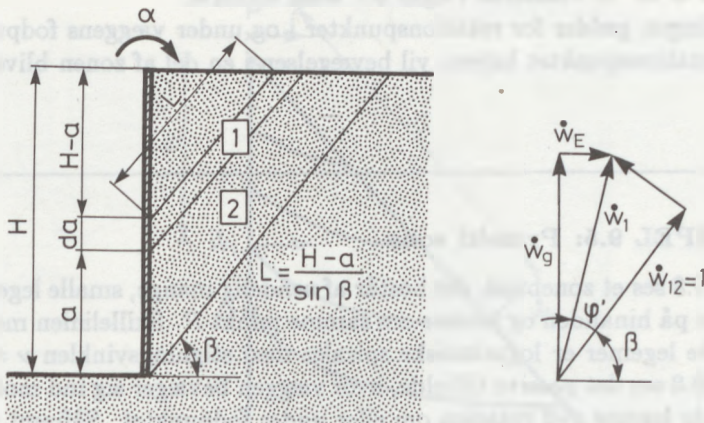
$$\int_V G \cdot \dot{w}_g dV = 0 \quad (9.7)$$

I praksis skilles arbejdet op i en positiv og en negativ komponent, der da skal være lige store. Se i øvrigt "Lærebog i Geoteknik" kap. 10.

EKSEMPEL 9.4: Rankine-brud. (Passivt jordtryk)

En lodret, glat væg roterer om fodpunktet. Det ønskes beregnet, hvor stor modstand jorden vil gøre mod bevægelsen. Brudmekanismen kan som i eksempel 8.4 tænkes at være uendelig mange, uendelig tynde flager, der glider på hinanden (figur 9.7). Tænkes bevægelsen mellem en sådan flage [1] at være $\dot{w}_{12} = 1$ i forhold til det underliggende, vil bevægelsen \dot{w}_1 af flagen danne vinklen $\beta + \varphi'$ med vandret.

Endvidere fås $\dot{w}_E = \dot{w}_1 \sin(90 - (\beta + \varphi'))$ og $\dot{w}_g = \dot{w}_1 \cos(90 - (\beta + \varphi'))$. Flage [1], der ved væggen har afstanden a fra fodpunktet, har altså



Figur 9.7: Rankine-brud.

bevægelseskomponenterne

$$\dot{w}_E = \alpha \cdot a \quad \text{og} \quad \dot{w}_g = \alpha \cdot a \cdot \tan(\beta + \varphi')$$

Arbejds ligningen for legeme **1** kan nu opstilles

$$\alpha a e da - \alpha a \tan(\beta + \varphi') \cdot dG = 0$$

hvor e er enhedsjordtrykket og egenvægten dG findes til

$$dG = \cos\beta da (H - a) \cdot \frac{1}{\sin\beta} \gamma = \gamma (H - a) \cot\beta da$$

$$e da = \gamma (H - a) \tan(\beta + \varphi') \cot\beta da$$

$$E = \int_0^H e da = +\gamma \tan(\beta + \varphi') \cot\beta \int_0^H (H - a) da$$

$$= \frac{1}{2} \gamma H^2 \tan(\beta + \varphi') \cot\beta$$

Udtrykket er i dette tilfælde nøjagtigt det samme som (9.5) på nær fortegnet på φ' . Derfor bliver resultatet af en ekstremumsbetingelse

$$\beta = 45 - \frac{\varphi'}{2} \quad \text{og} \quad E = \frac{1}{2} \gamma H^2 \tan^2 \left(45 + \frac{\varphi'}{2} \right) \quad (9.8)$$

E er på den usikre side, altså for stor.

Da $\beta < 45^\circ$ er vinklerne i figur 9.7 altså forkerte.

Løsningen gælder for rotationspunkter i og under væggenes fodpunkt. Ligger rotationspunktet højere, vil bevægelsen i en del af zonen blive forkert.

EKSEMPEL 9.5: Prandtl zone

På figur 9.8 ses et zonebrud, der består af uendelig mange, smalle legemer, der glider på hinanden og roterer om samme punkt P . Skillelinien mellem de enkelte legemer er logaritmiske spiraler med stigningsvinklen $\nu = \varphi'$. På figur 9.8 ses det passive tilfælde, hvor væggen bevæger sig ind mod det betragtede legeme ved rotation om eller under fodpunktet. Såfremt væggen bevæger sig bort fra jorden (aktivt brud), vil bevægelsen i skillelinien kræve, at spiralen ligger spejlvendt i forhold til passivt brud (se figur 9.9). Rent zonebrud kan ikke forekomme for rotationspunkter over fodpunktet, da en sammenblanding af aktivt og passivt zonebrud ikke er muligt.

Skillelinierne, som er brudlinier, har forlængelsen $\dot{\epsilon} = 0$, og det enkelte smalle legeme er stift. Ved en vinkeldrejning $\alpha = 1$ om punkt P , vil en flytning \dot{w}_1 af legemets ene ende modsvares af en bevægelse \dot{w}_2 af den anden ende. \dot{w}_1 og \dot{w}_2 er proportionale med afstanden til P .

Er toppunktvinklen 2α gælder således

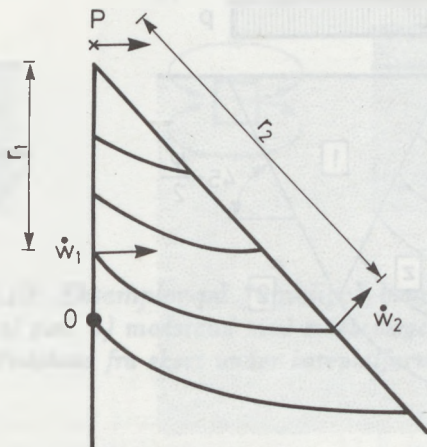
$$r_2 = r_1 e^{2\alpha \tan \varphi'} \quad (9.9)$$

og

$$\dot{w}_2 = \dot{w}_1 e^{2\alpha \tan \varphi'} \quad (9.10)$$

Bevægelserne \dot{w}_1 og \dot{w}_2 er vinkelrette på begrænsningerne og arbejdsligningen fortæller ikke noget om forskydningskræfter på begrænsningen. Imidlertid viser de Mohrske cirkler, at begrænsningen også er en brudlinie, men uden deformationer, således som det er muligt for et plastisk materiale. Langs begrænsningen fås altså

$$\tau = \sigma' \tan \varphi'$$



Figur 9.8: Prandtl-brud

EKSEMPEL 9.6: Kombineret brud. Vægtløs jord.

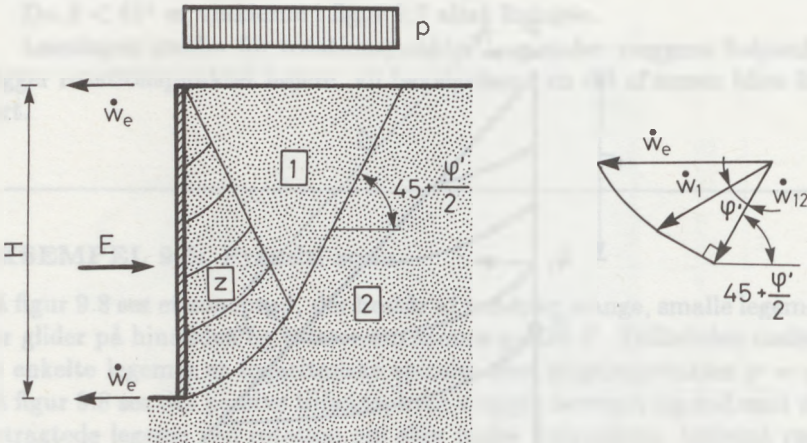
En ru væg parallelforskydes bort fra jorden (aktivt brud) (figur 9.9). Der antages et zonebrud [z] kombineret med flytningen af et stift legeme [1]. Det stive legemes skrå sider antages at danne vinklen $45 + \varphi'/2$ med vandret

Tænkes længden af trekantens vandrette side at være L indses let

$$H = \frac{L}{2 \sin(45 - \frac{\varphi'}{2})} e^{(\pi/4 - \varphi'/2) \tan \varphi'}$$

Bevægelsen i brudlinien mellem [1] og [2] sættes til $\dot{w}_{12} = \cos \varphi'$, hvorved bevægelsen af legeme [1] $\dot{w}_1 = 1$ (se figuren). Bevægelsen har vinklen $45 - \varphi'/2$ med vandret. Den lodrette komponent af \dot{w}_1 , $\dot{w}_p = \cos(45 + \varphi'/2)$. I zonen [z] omsættes \dot{w}_1 til \dot{w}_e efter ligning 9.10

$$\dot{w}_e = \dot{w}_1 e^{(\pi/4 - \varphi'/2) \tan(-\varphi')}$$



Figur 9.9: Kombineret brud.

\dot{w}_e er vandret. Arbejds ligningen giver nu

$$-E \cdot \dot{w}_e + p \cdot L \cdot \dot{w}_p = 0$$

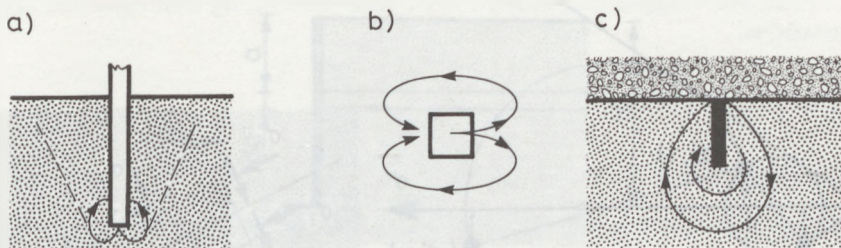
$$E = pH \cdot \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi'}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi'}{2} \right) e^{(\pi/2 - \varphi') \tan(-\varphi')}$$

eller efter omskrivning

$$E = pH \cos \varphi' \tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi'}{2} \right) e^{(\frac{\pi}{2} - \varphi') \tan(-\varphi')}$$

$$F = E \tan \varphi' \quad (9.11)$$

Såfremt φ' regnes med fortegn og negativ i det aktive tilfælde, fås de kurver, der er vist i "Lærebog i Geoteknik", bind 2, figur 11.14.



Figur 9.10: Eksempler på "umulige" brudfigurer.

a) spidsmodstand af pæl. b) modstand mod sidebevægelse af dybtliggende pæletværsnit. c) Modstand fra skørt under boreplatform.

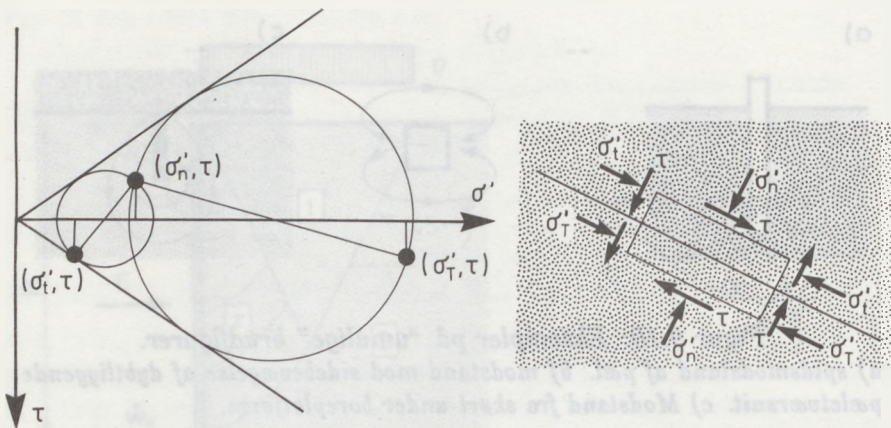
EKSEMPEL 9.7: Eksempler på umulige brudfigurer

Nogle brudberegninger kan slet ikke beregnes ved hjælp af plasticitetsteorien, og når det alligevel er forsøgt skal resultatet tages med stort forbehold.

Det gælder således for geostatiske beregninger af en pæls bæreevne, hvad enten den beregnes i ler eller sand. Der kan nemlig ikke angives en mulig brudmekanisme, med mindre den skal nå op til jordens overflade. Der skal være plads til den jordmasse, som pælen fortrænger. En sådan brudfigur bliver meget på den usikre side, fordi jorden uden for brudfiguren presses så meget sammen, at der bliver plads til det fortrængte volumen.

De to øvrige eksempler, som er vist på figur 9.10, kan lade sig gøre ved brud i ler, fordi konstruktionen ikke fortrænger materiale, men blot forskyder det. I friktionsmateriale kan det derimod ikke lade sig gøre, fordi bruddet i sig selv giver anledning til volumenudvidelser, som kun kan finde sted ved elastiske volumenændringer uden for brudzonen.

Disse tilfælde kan kun beregnes i en elastisk-plastisk tilstand.



Figur 9.11: Diskontinuert spændingsfelt.

9.4 Statisk tilladelige løsninger

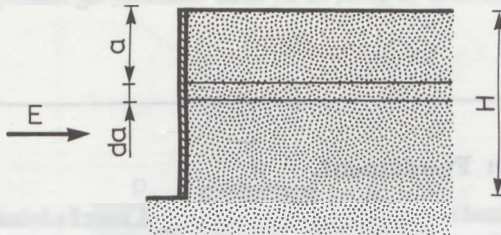
Statisk tilladelige løsninger konstrueres som et antal spændingsbånd med spændingsdiskontinuiteter i grænserne, idet et lille element i grænsefladen skal være i ligevægt. En mulig spændingsdiskontinuitet er vist på figur 9.11. Idet forholdet mellem σ'_{max} og σ'_{min} i et friktionsmateriale er

$$\sigma'_{max}/\sigma'_{min} = \tan^2\left(45 + \frac{\varphi'}{2}\right) \quad (9.12)$$

er den maksimale ændring i σ'_i altså

$$\sigma'_T = \sigma'_i \tan^4\left(45 + \frac{\varphi'}{2}\right) \quad (9.13)$$

Først belastes med en lille belastning, der ikke fremkalder brud, og der konstrueres ved anvendelse af spændingsbånd et spændingsfelt, der påvises at være i ligevægt. Derefter opproportioneres spændingerne indtil brud forekommer et sted i den betragtede masse, og denne værdi af belastningen er da brudlasten.



Figur 9.12: Statisk tilladelig løsning ved glat væg.

Såfremt jordoverfladen er ubelastet, vil jordelementer her straks gå i brud og beregningen kan ikke bruges uden væsentlige modifikationer.

Der vises to eksempler på denne beregningstype.

EKSEMPEL 9.8: Glat væg.

En glat væg forskydes ind i jord med rumvægt γ (passivt brud) med omdrejningspunktet i eller under væggenes fodpunkt (figur 9.12). En statisk tilladelig løsning anvender uendelig mange vandret liggende bånd med konstante spændingsforhold. Der betragtes et spændingsbånd med bredden da , der ligger i dybden a under jordoverfladen.

På spændingsbåndets sider virker $\sigma'_n = \gamma a$. Da τ antages at være 0 i vandret retning, fås herefter:

$$e = \gamma a \tan^2(45 + \frac{\varphi'}{2})$$

eller

$$E = \int_0^H e da = \frac{1}{2} \gamma H^2 \tan^2(45 + \frac{\varphi'}{2})$$

E er i princippet på den sikre side, altså for lille, men ved sammenligning med formel 9.8 ses løsningen at være korrekt.

Såfremt væggen ikke er glat, er σ_1 ikke vandret, og løsningen kan ikke anvendes.

EKSEMPEL 9.9: Fundament.

Bæreevnen af et fundament på vægtløs jord med overfladelast p kan som første tilnærmelse beregnes med et spændingsbånd (figur 9.13). σ_n i skillefladen bliver da

$$\sigma'_n = p \tan^2\left(45 + \frac{\varphi'}{2}\right)$$

og bæreevnen findes da af

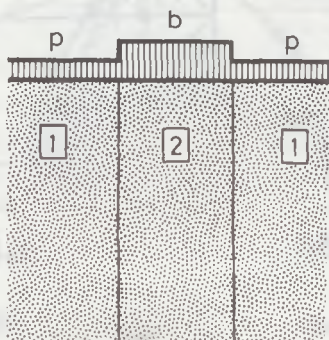
$$b = \sigma'_T = p \tan^4\left(45 + \frac{\varphi'}{2}\right)$$

Løsningen er på den sikre side. For $\varphi' = 30^\circ$ fås $b = 9p$, medens den korrekte løsning er $b = 17p$. For $\varphi' = 0^\circ$ fås den korrekte løsning $b = p$.

Såfremt der anvendes to spændingsbånd (analogt med eksempel 8.8) opnås nogen forbedring af resultatet, Hælder spændingsbåndene 30° opnås således $b = 12p$ for $\varphi' = 30^\circ$.

9.5 Eksempel på beregning med forskellig φ' og ν

En af plasticitetsteoriens vigtigste sætninger vedrører de statisk tilladelige løsninger. I afsnit 7.5 er bevist, at såfremt normalitetsbetingelsen er opfyldt, dvs. $\varphi' = \nu$, er en statisk tilladelig løsning altid på den sikre side. Det indses umiddelbart, at såfremt normalitetsbetingelsen ikke er opfyldt, kan man ikke bevise sætningen. I



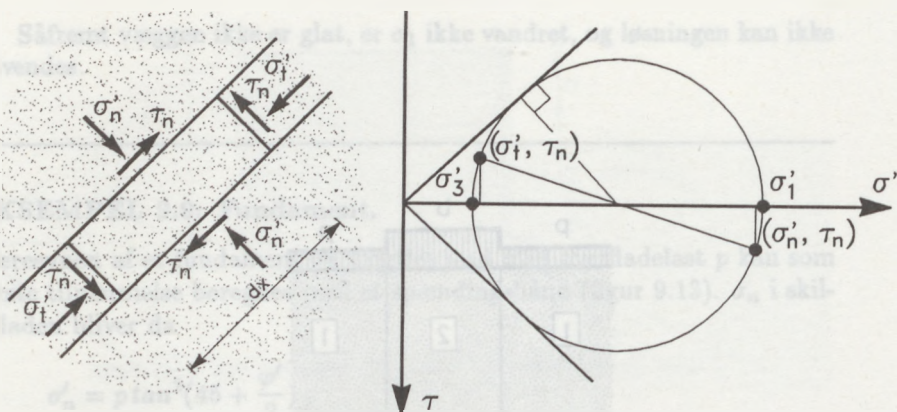
Figur 9.13: Bæreevne af fundament.

stedet kan man påpege at *en statisk tilladelig løsning kan være på den usikre side, når den anvendes på et friktionsmateriale.*

Problemet kan beskrives ved et simpelt eksempel. Lad os betragte en smal brudzone mellem to stive legemer i et rent friktionsmateriale med friktionsvinklen φ' og dilatationsvinklen $\nu = 0$. Der betragtes et så lille stykke dx , at det kan antages retlinet, og spændingerne kan regnes konstante (figur 9.14).

Vi ønsker nu at beregne, hvor stor en forskydningsspænding, der kan etableres i brud.

De *statisk tilladelige* løsninger kan opnås ved at antage et spændingsfelt i ligevægt, samt brud i den betragtede del af materialet. Såfremt normalspændingerne på to snit, der står vinkelret på hinanden, kendes, kan Mohrs cirkel optegnes og τ_n findes.



Figur 9.14: a) Liniebrud. b) Statisk till. løsninger.

Af figuren indses

$$\frac{\tau_n}{\sigma'_n} = \frac{1}{2} \sqrt{\left(1 + \frac{\sigma'_t}{\sigma'_n}\right)^2 \sin^2 \varphi' - \left(1 - \frac{\sigma'_t}{\sigma'_n}\right)^2} \quad (9.14)$$

der er den søgte statiske løsning, når forholdet mellem σ'_t og σ'_n er kendt.

τ_n bliver 0, når

$$\frac{\sigma'_t}{\sigma'_n} = \frac{1 + \sin \varphi'}{1 - \sin \varphi'} \quad \text{eller} \quad \frac{\sigma'_t}{\sigma'_n} = \frac{1 - \sin \varphi'}{1 + \sin \varphi'}$$

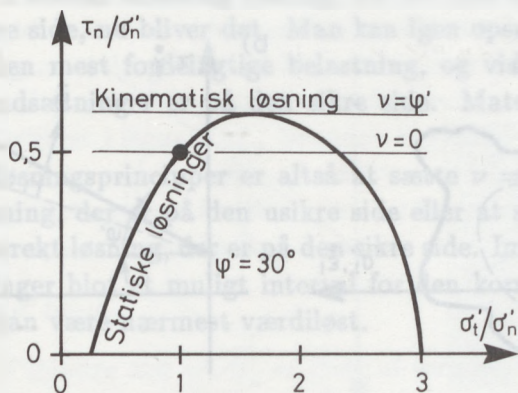
svarende til at σ'_t og σ'_n da er hovedspændingerne.

τ_n bliver maksimum for

$$\frac{\sigma'_t}{\sigma'_n} = \frac{1 + \sin^2 \varphi'}{1 - \sin^2 \varphi'}$$

og antager da den velkendte værdi

$$\tau_n = \sigma'_n \tan \varphi' \quad (9.15)$$



Figur 9.15: Normalitetsbetingelsens betydning.

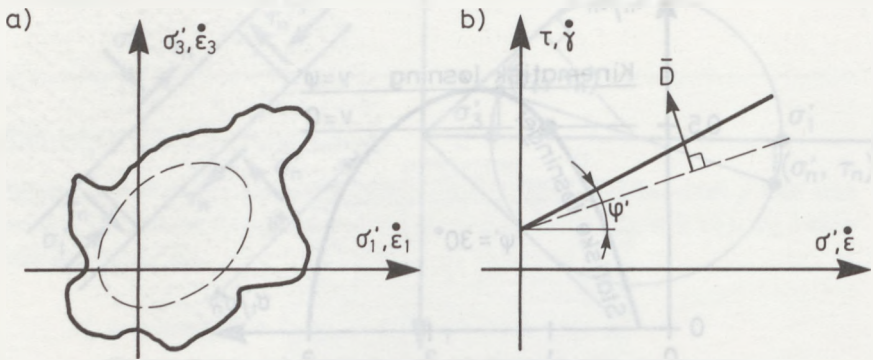
På figur 9.15 ses alle de statiske løsninger for $\varphi' = 30^\circ$.

For at opnå en kinematisk tilladelig løsning antages et flytningsfelt, hvor alle bevægelser er vandrette og hvor $\dot{\epsilon}_n$ i vandret retning er nul. Antagelsen skyldes, at brudzonen er begrænset af stive legemer. $\dot{\epsilon}$ er altså 0 i både vandret og lodret retning. Mohrs cirkel for tøjninger viser da, at hovedspændingsretningerne hælder 45° med vandret. Af figur 9.14 ses, at σ'_n og σ'_t da er lige store og dermed

$$\tau_n = \sigma'_n \sin \varphi' \quad (9.16)$$

Indlægges denne værdi i figur 9.15 kan statisk og kinematisk tilladelige løsninger sammenlignes. Det ses, at den statisk tilladelige løsning er på den usikre side i et ret stort interval. Men det kan naturligvis altid lade sig gøre at angive statiske løsninger, der er på den sikre side. (Man ved blot ikke hvornår!) Endvidere findes to løsninger, såfremt det forlanges, at den statisk og kinematisk tilladelige løsning skal give samme resultat.

Kun den ene løsning er korrekt. Den er vist med en cirkel. Overvej selv, hvorfor den anden ikke kan bruges.



Figur 9.16: a) Materialsvækkelse. b) Svækkelse af friktionsmateriale.

9.6 Materialsvækkelse

Såfremt normalitetsbetingelsen er opfyldt, gælder øvre- og nedre værdisætningen og eentydighedssætningen, således som gennemgået i kapitel 7. For et sådant materiale gælder også andre sætninger. Her skal nævnes sætningen om materialsvækkelse:

En statisk og kinematisk tilladelig brudbelastning beregnet ud fra en konveks brudflade, som omslutes helt af den aktuelle brudflade, vil være på den sikre side.

Den er også brugbar, såfremt normalitetsbetingelsen ikke er opfyldt i den aktuelle brudflade, men kan opfyldes i et svækket materiale. Figur 9.16 viser et materiale med en indre friktionsvinkel φ'_μ og \bar{D} står da ikke vinkelrette på brudbetingelsen. Der kan imidlertid let konstrueres et svækket materiale ved at sætte φ' lig med ν . Kendes en korrekt løsning vil indsættelse af denne friktionsvinkel give et resultat på den sikre side.

En anden løsning kan opnås ved at dreje tøjningsvektoren så meget, at normalitetsbetingelsen opfyldes, altså sætte $\nu = \varphi'$. Herved

opnås, at en statisk tilladelig løsning, der før ikke nødvendigvis var på den sikre side, nu bliver det. Man kan igen opsøge den løsning, der giver den mest fordelagtige belastning, og vide at den under de nye forudsætninger er på den sikre side. Materialet er blevet styrket.

De to løsningsprincipper er altså at sætte $\nu = \varphi'$ og finde en korrekt løsning, der er på den usikre side eller at sætte $\varphi' = \nu$ og finde en korrekt løsning, der er på den sikre side. Imidlertid angiver de to løsninger blot et muligt interval for den korrekte løsning og resultatet kan være nærmest værdiløst.

EKSEMPEL 9.10.

Lad os for eksempel betragte et lille, centralt, lodret belastet fundament, hvor overfladelasten er $q = 12 \text{ kPa}$, der står på en moræneler med $c' = 26 \text{ kPa}$, $\varphi' = 42^\circ$ og $\nu = 20^\circ$. γ -leddet er for små fundamenter betydningsløst i dette tilfælde. N_q og N_c er beregnet på grundlag af korrekte løsninger.

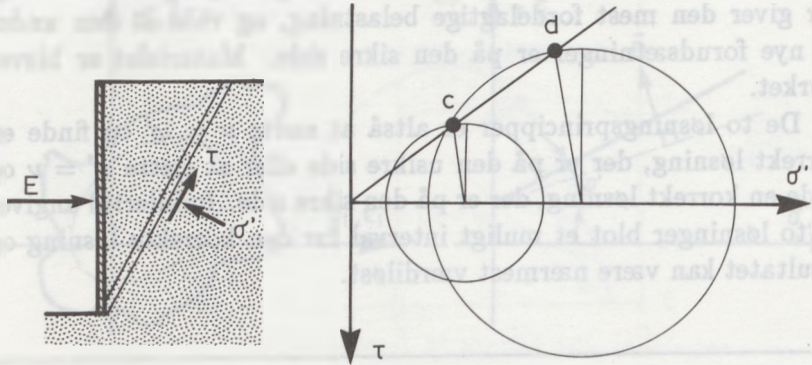
En værdi på den usikre side fås ved at sætte $\nu = \varphi' = 42^\circ$, hvorved findes $N_q = 85$ og $N_c = 140$. Bæreevnen b bliver da

$$b = 12 \cdot 85 + 26 \cdot 140 \sim 4600 \text{ kPa}$$

En værdi, der er på den sikre side, fås ved at sætte $\varphi' = \nu = 20^\circ$, hvortil svarer $N_q = 6,5$ og $N_c = 15$. Heraf fås

$$b = 12 \cdot 6,5 + 26 \cdot 15 \simeq 500 \text{ kPa}$$

Eksemplet viser, at der må findes en anden mulighed, fx kan man antage en værdi af $\varphi' = \nu$ som ligger mellem de to yderpunkter. Man kan fx anvende modelforsøg for at finde den reducerede værdi



Figur 9.17: Beregning af materialsvækkelse.

af φ' , φ'_d men kan da ikke vide om samme størrelse af reduktion skal bruges i andre tilfælde.

EKSEMPEL 9.11.

Modelforsøg er rent faktisk udført med små plader for netop det anførte eksempel 9.10. Bæreevnen er her fundet til

$$b = 2100 \text{ kPa}$$

og det indses let at svare til $\varphi'_d = \nu_d = 38^\circ$, altså en ganske lille reduktion af φ' med en stor virkning på b .

Eksempel 9.11 viser, at reduktionen af φ' i dette tilfælde er på ca. 10%.

Bent Hansen har påpeget et andet grundlag for beregningen af materialesvækkelsen, som kan anvendes, såfremt brudfiguren består af stive legemer, der glider på hinanden. Betragtes fx en glat væg under parallelforskydning bort fra jorden, kan man tænke sig bruddet som angivet i figur 9.17. Bruddet begrænses af stive legemer og snitretningen svarer derfor til punkterne c og d . Ved opstilling af ligevægtsbetingelsen for det stive jordlegeme skal benyttes de tilsvarende spændinger, der kan beregnes af:

$$\tau = \sigma' \tan \varphi'_d$$

hvor φ'_d er mindre end φ' . φ'_d er givet af formlen

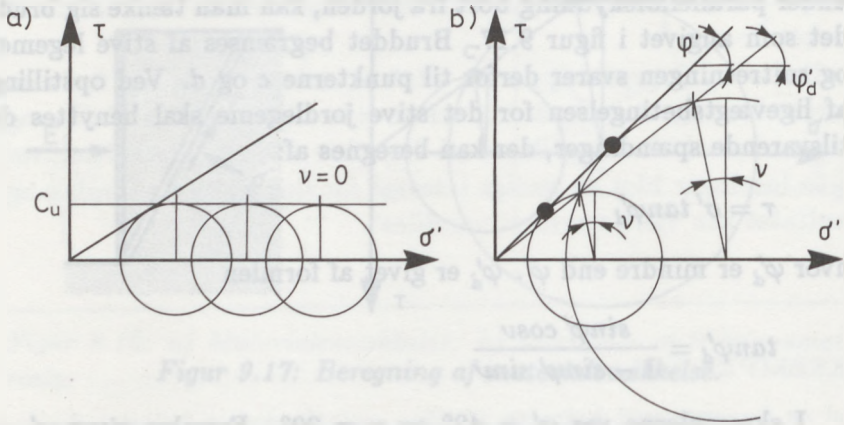
$$\tan \varphi'_d = \frac{\sin \varphi' \cos \nu}{1 - \sin \varphi' \sin \nu}$$

I eksemplerne var $\varphi' = 42^\circ$ og $\nu = 20^\circ$. Formlen giver $\varphi'_d = 39.2^\circ$, altså næsten det samme som modelforsøg.

Argumentationen fører altså frem til, at en reduceret friktionsvinkel skal anvendes. Der foreslås anvendt en friktionsvinkel φ'_d , der findes af formel (5.26) på grundlag af den plane friktionsvinkel. Den er med god tilnærmelse lig med den triaxialt målte friktionsvinkel!

NB: Det er ikke det, man gør i dag, hvis man følger de danske normer, og når man alligevel ikke er udsat for et stort antal uheld, må det skyldes, at der er indbygget en meget væsentlig sikkerhed i fastlæggelsen af de ydre omstændigheder. For eksempel ses der bort fra dybdeled i bæreevneformlen og de stabiliserende kræfter fra porevinkelvand i umættede zoner.

Fremgangsmåden er helt analog med den der anvendes i det udrænede tilfælde. (Se figur 9.18) I begge tilfælde regnes nemlig ikke på de snit, hvor brudbetingelsen er opfyldt, men på de snit, hvori der ikke er forlængelse. Hertil kommer, at man i det udrænede tilfælde ikke kan anvende effektive spændinger som omtalt i kapitel 6.



Figur 9.17: Beregning af snitretninger

Figur 9.18: Udvælgelse af snitretninger ved
a) udrænet brud b) drænet brud i friktionsmateriale.

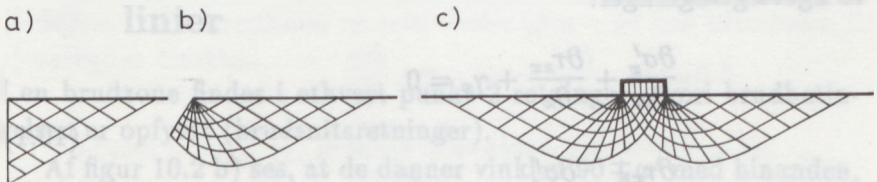
Statisk bestemte brud

10.1 Indledning

En metode, der er langt ældre end plasticitetsteorien, kan anvendes i de tilfælde, hvor brudfigurerne alene består af brudzoner.

Den bygger på opfyldelse af ligevægtsligningerne og brudbetingen i ethvert punkt af den betragtede jordmasse. Spændinger og belastninger kan derved beregnes uden kendskab til deformationerne. Brudfigurer, der kun består af brudzoner kaldes *statisk bestemte*.

Typiske eksempler er vist på figur 10.1, nemlig zonebrud opkaldt efter Rankine (1857) og Prandtl (1920), der først beregnede spæn-



Figur 10.1: Eksempler på statisk bestemte brud.

dingerne her, og en brudfigur under et fundament med overfladelast. De to sæt af linier har i ethvert punkt tangenter i de retninger, hvori brudbetingelsen er opfyldt. De kaldes spændingskarakteristikker.

Af senere arbejder kan nævnes H. Lundgren og K. Mortensen(1953), der beregnede de meget nøjagtige værdier af N_γ , der benyttes i funderingsnormerne.

Beregningsmetoden er ikke statisk tilladelig, fordi der ikke redegøres for spændingerne uden for brudzonerne, og man kunne derfor strengt taget tænke sig områder i brudtilstand her også. En statisk bestemt brudberegning benytter således et partielt spændingsfelt. Konsekvensen heraf omtales i afsnit 11.4.

Statisk tilladelige løsninger bygger på spændingsbånd, der gør det muligt at gøre rede for spændingerne overalt. Herved sikres, at løsningen altid er på den sikre side. Til gengæld kan spændingsbåndene ofte føre til løsninger, der er meget på den sikre side.

Figurerne 10.1 a) og b) minder meget om figur 8.3 c) og d) og figur 9.3 c) og d), hvor der er redegjort for brudmekanismen (bevægelsesfeltet). Sammenligningen viser, at såfremt $\nu = \varphi'$ foregår glidningerne i det ene sæt spændingskarakteristikker.

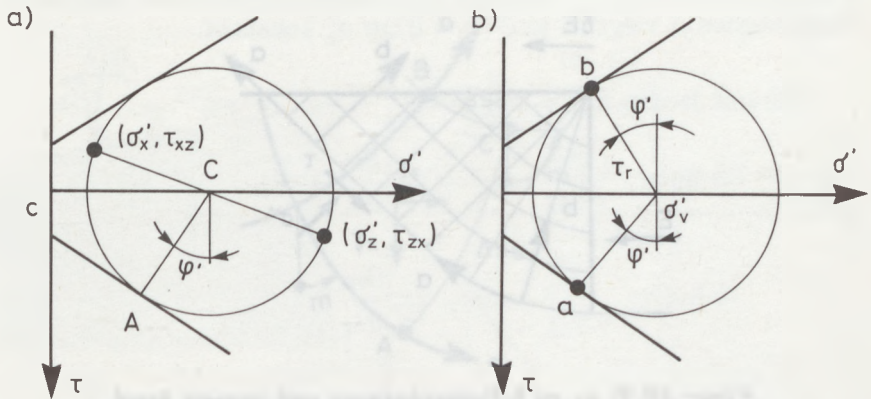
10.2 Grundlæggende ligninger

I ethvert punkt i en brudzone skal ligevægtsligningerne altid være opfyldt. I det plane tilfælde er der tre ubekendte σ'_x, τ_{xz} og σ'_z og to ligevægtsligninger:

$$\frac{\partial \sigma'_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \gamma_x = 0 \tag{10.1}$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma'_z}{\partial z} + \gamma_z = 0$$

I brudzoner skal desuden opfyldes brudbetingelsen, der i følge



Figur 10.2: Spændingsforhold ved statisk bestemte brud.

figur 10.2 (ved projektion på AC) kan skrives:

$$c' \cos \varphi' + \frac{1}{2}(\sigma'_x + \sigma'_z) \sin \varphi' = \sqrt{\frac{1}{4}(\sigma'_z - \sigma'_x)^2 + \tau_{xz}^2} \quad (10.2)$$

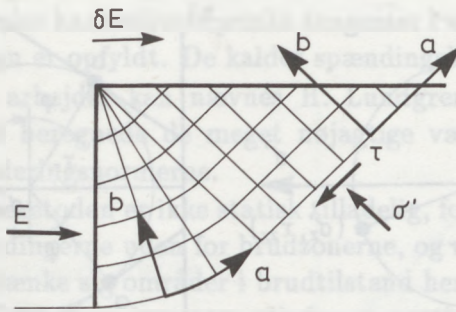
idet x - og z -aksen kun sjældent er brudsnitsretninger.

Det ses, at ligningssystemet (10.1) - (10.2) er tre ligninger med tre ubekendte. Ligningssystemet er vanskeligt at løse.

10.3 Spændingsvariationer langs med brudlinier

I en brudzone findes i ethvert punkt 2 retninger, hvori brudbetingelsen er opfyldt (brudsnitsretninger).

Af figur 10.2 b) ses, at de danner vinklen $90^\circ \mp \varphi'$ med hinanden, og at det snit, hvorpå største hovedspænding virker, halverer den stumpe vinkel. Som signatur for brudzoner tegnes derfor et antal brudlinier i brudzonen. Brudliniernes tangent i ethvert punkt har



Figur 10.3: *a*- og *b*-linieretninger ved passivt brud.

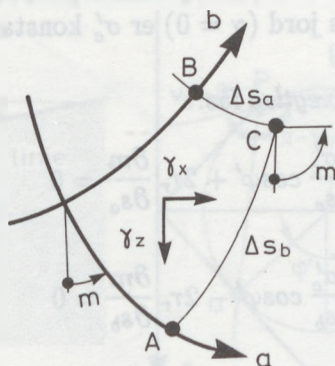
samme retning som brudsnittet. Brudlinierne kan deles i to klasser: *a*-linier, hvori τ_f er positiv og *b*-linier, hvori τ_f er negativ. På figur 10.3 ses en karakteristisk brudfigur med *a*- og *b*-linier indtegnet. *a*- og *b*-liniernes positive gennemløbsretning bestemmes af, at forskydningspændingerne vender bort fra den spidse vinkel.

Spændingsvariationen langs brudlinierne kan findes ved løsning af ligningssystemet (10.1) og (10.2) og skrives sædvanligvis på formen

$$\begin{aligned} a\text{-linier: } & \frac{\partial \sigma'_c}{\partial s_a} \cos \varphi' + 2\tau_r \frac{\partial m}{\partial s_a} \\ & = \gamma_z \cos(m + \varphi') + \gamma_x \sin(m + \varphi') \end{aligned} \quad (10.3)$$

$$\begin{aligned} b\text{-linier: } & \frac{\partial \sigma'_c}{\partial s_b} \cos \varphi' - 2\tau_r \frac{\partial m}{\partial s_b} \\ & = -\gamma_z \sin m + \gamma_x \cos m \end{aligned}$$

hvor σ'_c er centrum for Mohrs cirkel ($\sigma'_c = \frac{1}{2}(\sigma'_x + \sigma'_y)$) og τ_r er radius i Mohrs cirkel. s er længden af *a*- eller *b*-linierne. Se i øvrigt figur 10.4.



Figur 10.4: Definitioner i formel (10.3).

Spændingsvariationen kan også udledes ved ligevægtsbetragtninger af et elementarlegeme begrænset af brudlinier.

Formlerne (10.3) kan udnyttes til at beregne spændingen σ'_c og vinklen m i et punkt C , såfremt spænding og vinkel er kendt i to punkter A og B (figur 10.4). Det bemærkes, at spændingstilstanden beskrives fuldstændig ved σ'_c , fordi brudbetingelsen også skal være opfyldt. Formlerne kan altså bruges til en numerisk gennemregning af en hel brudfigur, idet man starter ved jordoverfladen og efterhånden arbejder sig hen til konstruktionen.

I visse tilfælde kan formlerne forenkles.

Såfremt alle brudlinier er *rette linier* ($\partial m = 0$) kan tilvæksten i σ'_c beregnes direkte:

$$a\text{-linier: } \Delta\sigma'_c = \frac{\cos(m + \varphi')}{\cos\varphi'} (\gamma_z + \gamma_x \tan(m + \varphi')) \Delta s_a \quad (10.4)$$

$$b\text{-linier: } \Delta\sigma'_c = \frac{\cos m}{\cos\varphi'} (\gamma_x - \gamma_z \tan m) \Delta s_b$$

I tung jord ($\gamma \neq 0$) fås altså, at σ'_c vokser proportionalt med brudlinielængden, i vægtløs jord ($\gamma = 0$) er σ'_c konstant.

Såfremt jorden er vægtløs fås:

$$\begin{aligned} a\text{-linier: } \quad & \frac{\partial \sigma'_c}{\partial s_a} \cos \varphi' + 2\tau_r \frac{\partial m}{\partial s_a} = 0 \\ b\text{-linier: } \quad & \frac{\partial \sigma'_c}{\partial s_b} \cos \varphi' - 2\tau_r \frac{\partial m}{\partial s_b} = 0 \end{aligned} \quad (10.5)$$

Er jorden vægtløs og kohæsiøsløs er $\tau_r = \sigma'_c \sin \varphi'$, hvad der yderligere forenkler formlerne (10.5), der nu kan integreres direkte:

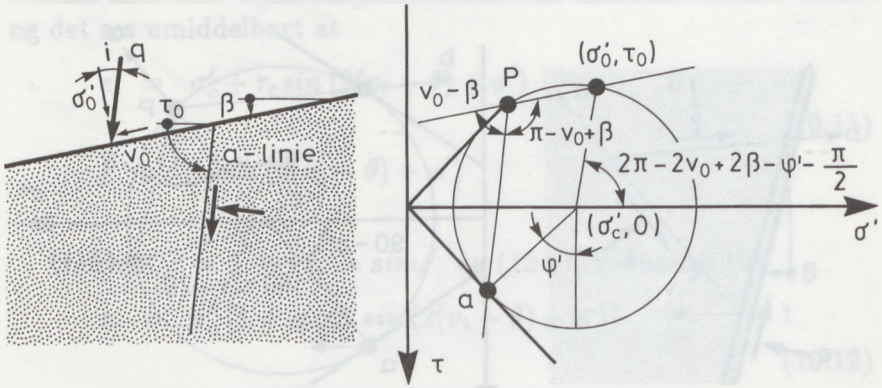
$$\begin{aligned} a\text{-linier: } \quad & \sigma'_c = \sigma'_{c0} \cdot e^{-2 \tan \varphi' (m - m_0)} \\ b\text{-linier: } \quad & \sigma'_c = \sigma'_{c0} \cdot e^{+2 \tan \varphi' (m - m_0)} \end{aligned} \quad (10.6)$$

Er jorden vægtløs og friktionsløs bliver udtrykket yderligere simplificeret. Nu er $\tau_r = c_u$ og $\varphi' = 0$, og integrationen giver

$$\begin{aligned} a\text{-linier: } \quad & \sigma'_c - \sigma'_{c0} = -2c_u(m - m_0) \\ b\text{-linier: } \quad & \sigma'_c - \sigma'_{c0} = 2c_u(m - m_0) \end{aligned} \quad (10.7)$$

10.4 Statistiske forhold ved jordoverflade

På figur 10.5 er vist de statistiske forhold ved en jordoverflade, der er skrå og påvirket af en overfladelast, der hælder vinklen i med normalen. Det er endvidere forudsat, at det er en a -linie, der er begrænsning af brudzonen. Såfremt det er en b -linie, der danner



Figur 10.5: Statistiske forhold ved belastet jordoverflade.

begrænsningen, er τ som bekendt negativ. Beregningerne for b -linier er identiske, blot skal c' og φ' i så fald regnes negative.

a -linier φ' og c' positive

b -linier φ' og c' negative

I foregående afsnit er opstillet ligninger for både a - og b -linier. Her skal φ' og c' derfor naturligvis regnes positive.

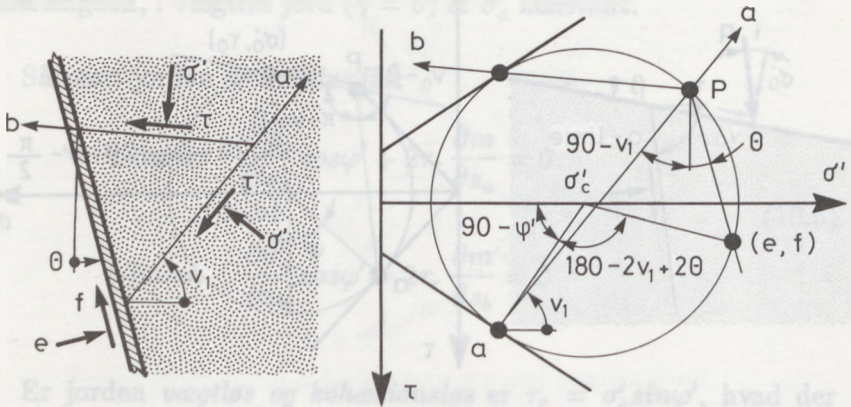
Af Mohrs cirkel fås direkte:

$$\sigma'_0 = \sigma'_c + \tau_r \cos \left(2\pi - 2v_0 + 2\beta - \varphi' - \frac{\pi}{2} \right) \quad (10.8)$$

$$\tau_0 = -\tau_r \sin \left(2\pi - 2v_0 + 2\beta - \varphi' - \frac{\pi}{2} \right)$$

eller såfremt $c' = 0$

$$\sigma'_0 = \sigma'_c [1 - \sin \varphi' \sin (2(v_0 - \beta) + \varphi')]$$



Figur 10.6: Statiske forhold ved væg.

(10.9)

$$\tau_0 = -\sigma'_c \sin \varphi' \cos(2(v_0 - \beta) + \varphi')$$

idet $\sigma'_0 = q' \cos i$ og $\tau_0 = q' \sin i$ fås

$$\cos(2(v_0 - \beta) + \varphi' + i) = -\frac{\sin i}{\sin \varphi'} \quad (10.10)$$

$(v_0 - \beta)$ er den statisk korrekte vinkel ved en jordoverflade, hvis c' er forskellig fra 0.

10.5 Statiske forhold ved væg

Også her kan man nøjes med at betragte a -linier. Benyttes følgende formler ved b -linier regnes φ' og c' negative.

De statiske forhold ved en væg fremgår af figur 10.6. Væggen hælder θ med lodret. Ved passivt jordtryk er beliggenheden af a - og

b-linier som vist. Spændingsforholdene kan afbildes i Mohrs cirkel, og det ses umiddelbart at

$$e = \sigma'_c + \tau_r \sin(2(v_1 - \theta) + \varphi') \quad (10.11)$$

$$f = \tau_r \cos(2(v_1 - \theta) + \varphi')$$

Såfremt $c' = 0$ er $\tau_r = \sin\varphi'$ og (10.11) reduceres til

$$e = \sigma'_c (1 + \sin\varphi' \sin(2(v_1 - \theta) + \varphi')) \quad (10.12)$$

$$f = \sigma'_c \sin\varphi' \cos(2(v_1 - \theta) + \varphi')$$

Indføres vægfriktionsvinklen δ defineret ved $f = e \tan\delta$ fås

$$\cos(2(v_1 - \theta) + \varphi' + \delta) = \frac{\sin\delta}{\sin\varphi'} \quad (10.13)$$

EKSEMPEL 10.1: Jordtryk på støttemur.

På figur 10.7 ses en støttemur, hvis bagside skråner $\theta = 18^\circ$ og jordoverfladen hælder $\beta = 11^\circ$. Med normale fortegneregler er begge vinkler positive. På jordoverfladen virker en lodret overfladelast p kN pr. m^2 . Jorden er kohæsionsløs og $\varphi' = 40^\circ$. Der ønskes beregnet den del af jordtrykket, der stammer fra overfladelasten.

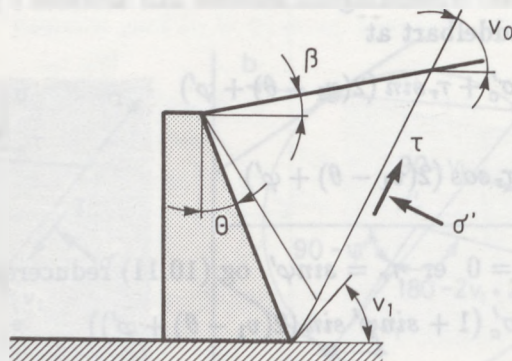
Det bemærkes først, at begrænsningen er en *b*-linie. φ' skal altså regnes negativ i formel (10.10) og formel (10.13).

Ved jordoverfladen bestemmes v_0 af:

$$\cos(2v_0 - 40^\circ - 11^\circ) = -\frac{\sin(11^\circ)}{\sin(-40^\circ)} \rightarrow v_0 = 61.9^\circ$$

Ved væggen bliver v_1 :

$$\cos(2v_1 - 2 \cdot 18^\circ - 2 \cdot 40^\circ) = 1 \rightarrow v_1 = 58^\circ$$



Figur 10.7: Jordtryk bag støttemur.

Brudfiguren består således af en Prandtl-zone ved væggen med en topvinkel på $3.9^\circ = 0,068 \text{ rad}$, samt en Rankine-zone.

Ved jordoverfladen fås σ'_{c0} af formel (10.9)

$$\sigma'_0 = p \cdot \cos i = \sigma'_{c0} [1 - \sin(-40^\circ) \sin(2(v_0 - \beta) + (-40^\circ))]$$

$$\sigma'_{c0} = \frac{p \cos 11^\circ}{1 + \sin 40^\circ \sin 61.8^\circ} = 0.63p$$

Ved væg beregnes σ'_c af formel (10.6)

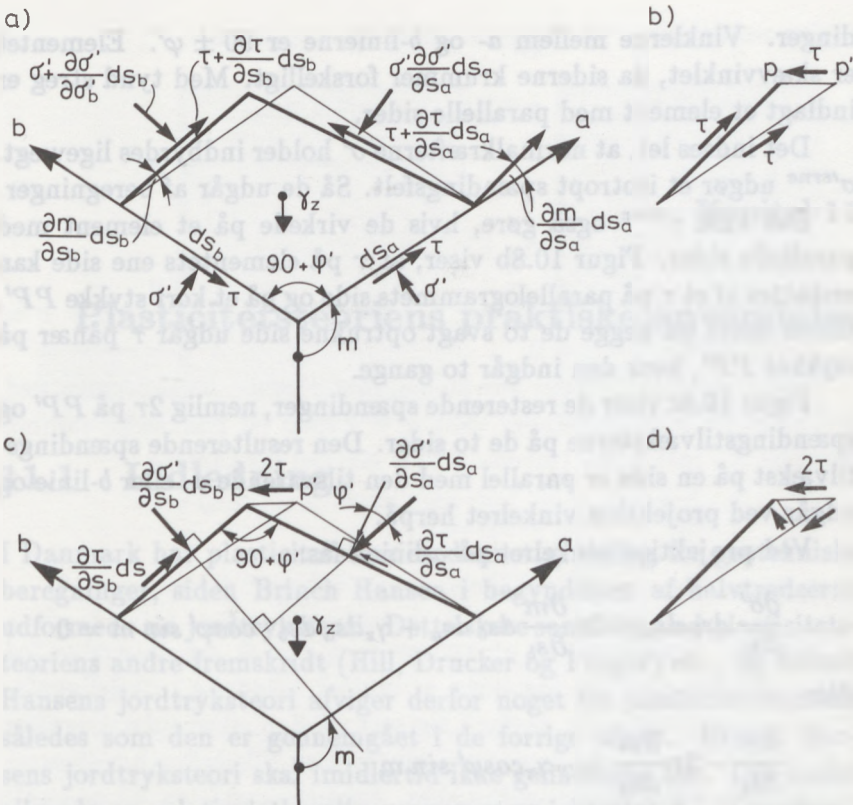
$$\sigma'_c = 0.63p e^{2 \tan \varphi' \cdot 0.068} = 0.71p$$

Endelig fås enhedsjordtrykket på væggen af formel (10.13):

$$e = 0.71p (1 + \sin(-40^\circ) \sin(2(58^\circ - 18^\circ) + (-40^\circ))) = 0.42p$$

$$f = 0.71p \sin 40^\circ \cos 40^\circ = 0.35p$$

Det ses, at e og f er konstante. Jordtrykket er altså rektangulært fordelt.



Figur 10.8: Spændingsvariationer langs a- og b-linier.

10.6 Ligevægt af element

Løsningen af ligningerne (10.1) og (10.2) kan gøres relativt simpel ved at betragte ligevægten af et element, der er begrænset af spændingskarakteristikker.

Fig. 10.8a viser et sådant element med sidelængden ds_a og ds_b langs a- og b-linier, henholdsvis. a- og b-liniernes hældning i ethvert punkt beskrives ved vinklen m , der varierer langs både a- og b-linier. På elementets sider virker normal- og forskydningsspæn-

dinger. Vinklerne mellem a - og b -linierne er $90 \pm \varphi'$. Elementet er skævvinklet, da siderne krummer forskelligt. Med tynd streg er indlagt et element med parallelle sider.

Det indses let, at normalkræfterne σ' holder indbyrdes ligevægt. σ'^{erne} udgør et isotropt spændingsfelt. Så de udgår af beregninger.

Det ville τ^{erne} også gøre, hvis de virkede på et element med parallelle sider. Figur 10.8b viser, at τ på elementets ene side kan erstattes af et τ på parallelogrammets side og på et kort stykke PP' . Gøres dette på begge de to svagt optrukne side udgår τ pånær på stykket PP' , hvor den indgår to gange.

Figur 10.8c viser de resterende spændinger, nemlig 2τ på PP' og spændingstilvæksterne på de to sider. Den resulterende spændingstilvækst på en side er parallel med den tilsvarende a - eller b -linie og udgår ved projektion vinkelret herpå.

Ved projektion vinkelret på a -linien fås:

$$\frac{\partial \sigma'}{\partial s_b} ds_b ds_a - 2\tau \frac{\partial m}{\partial s_b} ds_b ds_a + \gamma_z ds_a ds_b \cdot \cos \varphi' \sin m = 0$$

eller

$$\frac{\partial \sigma'}{\partial s_b} - 2\tau \frac{\partial m}{\partial s_b} = -\gamma_z \cos \varphi' \sin m$$

Indføres (ved Mohrs cirkel):

$$d\sigma' = d\sigma'_c \cdot \cos^2 \varphi'$$

$$d\tau = \partial \tau_r \cdot \cos \varphi'$$

fås

$$\frac{\partial \sigma'_c}{\partial s_b} \cdot \cos \varphi' - 2\tau_r \frac{\partial m}{\partial s_b} = -\gamma_z \sin m$$

eller udtrykket for b -linier i formel (10.3).

Projektion vinkelret på b -linien fører tilsvarende til formelen for a -linier.

Kapitel 11

Plasticitetsteoriens praktiske anvendelse

11.1 Indledning

I Danmark har plasticitetsteorien dannet grundlag for geotekniske beregninger, siden Brinch Hansen i begyndelsen af halvtredserne udformede sin jordtryksteori. Dette skete samtidig med plasticitetsteoriens andre fremskridt (Hill, Drucker og Prager) etc., og Brinch Hansens jordtryksteori afviger derfor noget fra plasticitetsteorien, således som den er gennemgået i de forrige afsnit. Brinch Hansens jordtryksteori skal imidlertid ikke gennemgås her. Der findes allerede en relativ letlæselig gennemgang i kapitel 9 i "Lærebog i Geoteknik".

Ved plasticitetsteoriens praktiske anvendelse kræves yderligere nogle overvejelser, hvoraf de vigtigste nævnes i det følgende.

11.2 Superpositionsprincippet

Oftest mødes i praksis problemstillinger, hvor både jordens egenvægt, kohæsion og overflade spiller en væsentlig rolle. Men som det er vist tidligere, er det vanskeligt at inddrage jordens rumvægt i beregningerne. Det er da også velkendt, at man foretrækker at

angive resultaterne på følgende måde for bæreevner:

$$b = \frac{1}{2} \gamma B N_{\gamma} s_{\gamma} i_{\gamma} + q N_q s_q d_q i_q + c N_c s_c d_c i_c$$

og for jordtryk

$$e = \sum (\gamma d) K_{\gamma} + p K_p + c K_c$$

De enkelte led fremkommer ved at sætte henholdsvis $q = c = 0$, $\gamma = c = 0$ og $\gamma = q = 0$.

Der er dog i princippet kun to led, idet c -leddet let indregnes ved at forøge normalspændinger med $a = c \cot \varphi$ og fratække samme størrelse fra resultatet (formel 5.13). Herved fås således

$$N_c = (N_q - 1) \cot \varphi$$

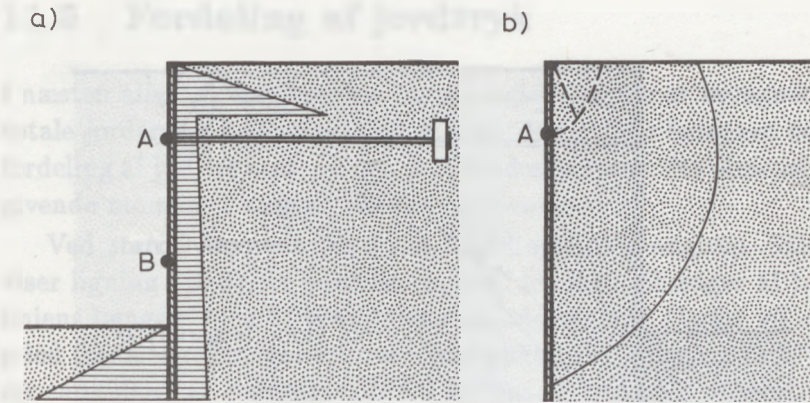
$$\text{og } K_c = (K_p - 1) \cot \varphi$$

γ -leddet udregnes ved at antage $q = c = 0$, og de øvrige led ved at antage $\gamma = 0$. Metoden er statisk tilladelig i opdelingsfasen, og superpositionen derfor i sig selv på den sikre side. Derefter kan de enkelte led bestemmes ved kinematisk tilladelige brudfigurer og dermed være på den usikre side. Fremgangsmåden vil normalt tilsammen give et resultat, der er på den sikre side.

Funderingsnormerne (1977) sætter — på den sikre side — $d_q = d_c = 1$.

11.3 Valg af brudmåde

Ved visse konstruktionstyper kan man vælge mellem flere brudmåder for konstruktionen. Det bedst kendte eksempel er spunsvægge, hvor man kan vælge mellem stive vægge, eller vægge med et, to eller tre flydecharnierer, eventuelt svigtende anker. Man kan nu undre sig over hvilken brudmåde, der vil forekomme i virkeligheden.



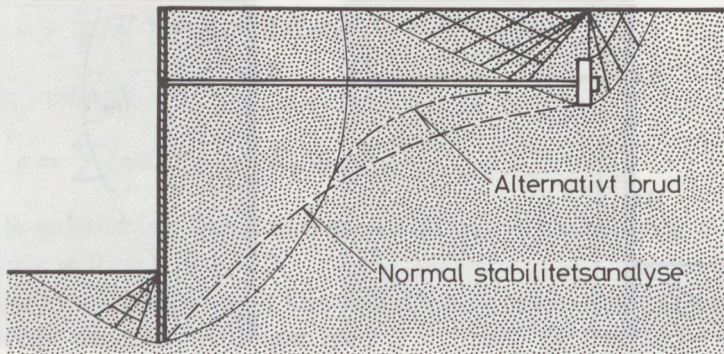
Figur 11.1: Spunsvæg med flydecharnier.

Som påvist af Brinch Hansen vil en korrekt dimensioneret jordtrykspåvirket konstruktion bryde på netop den måde, som er forudsat! Det skyldes, at belastningen på konstruktionen er afhængig af brudmåden, og ændrer sig på en for konstruktionen stabiliserende måde, såfremt der bliver tilløb til en anden brudform.

Som eksempel kan nævnes en stiv spunsvæg, der er dimensioneret for maksimalmomentet i punkt *B* (figur 11.1 a). Begynder væggen at flyde i ankerpunktet *A*, vil det passive tryk straks falde, og flydningen standses. Begynder væggen at rotere den forkerte vej, vil jordtrykket på væggens forside falde, medens jordtrykket på bagsidens nederste del stiger. Herved standses denne bevægelse.

11.4 Partielt spændingsfelt

I mange tilfælde gøres der ikke rede for spændingerne overalt i materialet. Det undersøgte spændingsfelt er partielt, og det er i sig selv på den usikre side at anvende en sådan fremgangsmåde. I det følgende omtales to almindeligt forekommende problemer.



Figur 11.2: Undersøgelse af partielt spændingsfelt.

Såfremt løsningen er kinematisk tilladelig, gøres kun rede for spændingerne i brudlinien, og der kan være brud andre steder end forudsat. I figur 11.1 b) er også vist den brudfigur, der ligger til grund for beregningerne af en stiv spunsvæg. Der antages et stift legeme, der har drejningspunkt foran væggen og altså også glider på væggen. Man kunne tænke sig, at der var lokalt brud på spunsvæggens øvre del (antydnet ved punktering). Derfor må man sikre sig, at væggen ikke flyder i ankerpunktet for et moment, der svarer til aktivt brud.

Et andet typisk eksempel på et partielt spændingsfelt forekommer bag en forankret spunsvæg, hvor der gøres rede for spændingerne omkring ankeret og omkring spunsvæggen. Den af Brinch Hansen forudsatte brudfigur ved stiv væg er vist på figur 11.2. Muligheden for et brud gennem andre dele af jorden er i høj grad til stede. Derfor foretages altid en "stabilitetsanalyse", hvor brudlinien antages at gå gennem væggen og ankerpladens fodpunkter. Ved denne undersøgelse findes den ankerlængde, der sikrer at væggen og ankerpladen bryder hver for sig.

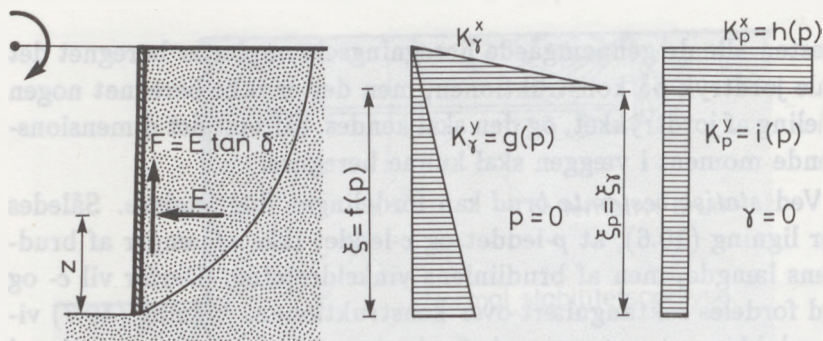
11.5 Fordeling af jordtryk

I næsten alle de gennemgåede beregningseksempler er beregnet det totale jordtryk på konstruktionen, men der er ikke beregnet nogen fordeling af jordtrykket, og den skal kendes, såfremt det dimensionsgivende moment i væggen skal kunne beregnes.

Ved *statisk bestemte brud* kan fordelingen dog angives. Således viser ligning (10.6), at p -leddet og c -leddet ikke afhænger af brudliniens længde, men af brudliniens vinkeldrejning. Derfor vil c - og p -led fordeles rektangulært over konstruktionen. Ligning (10.7) viser endvidere, at σ stammende fra jordens egenvægt er proportional med brudliniens længde og dermed at γ -led er proportionalt (trekantsformigt) fordelt. Statisk bestemte brud forekommer fx ved lodrette vægge med rotationspunkt under fodpunktet og i visse tilfælde også ved skrå vægge og hældende jordoverflade.

Ved *kinematisk tilladelige* brudberegninger benyttes arbejdsligningen, og den kan kun frembringe een størrelse. Det kan være tilstrækkeligt, som bæreevneberegninger viser. Bæreevnen kan findes, men reaktionsfordelingen kendes ikke. (Den er dog meget tæt på at være jævnt fordelt.) Ved parallelforskydninger kan jordtrykkets størrelse bestemmes, men igen kan man ikke bestemme fordelingen af trykket. Ved rotationer af en væg omkring et punkt kan bestemmes momentet omkring punktet, men ikke jordtrykkets størrelse og fordeling, og metoden er altså uanvendelig til dimensionering af væggen.

Brinch Hansen indførte derfor *ligevægtsmetoden*, idet han gennemførte en beregning af spændingsforholdene i en brudlinie. Herefter kan bestemmes ligevægten af det legeme, der ligger inden for brudlinien, og jordtrykkets størrelse, retning og angrebspunkt kan bestemmes. Fordelingen kan derimod ikke altid bestemmes uden yderligere antagelser, fordi det ikke er muligt at finde spændingsfordelingen i et stift legeme, med mindre dets deformationsegenskaber kendes. Brinch Hansen har derfor foreslået at antage en så



Figur 11.3: Brinch Hansens jordtryksfordeling.

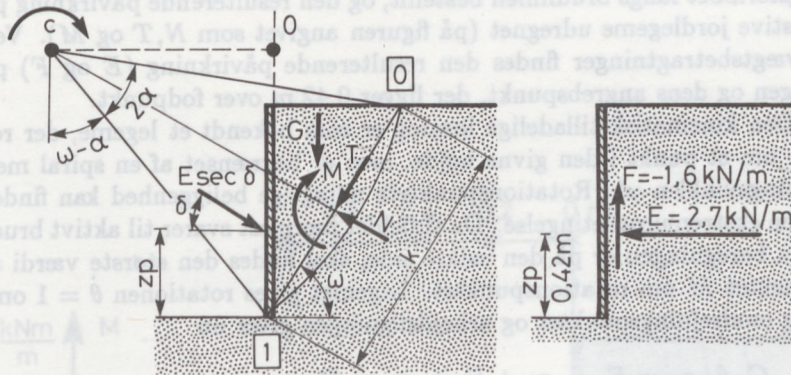
simpel spændingsfordeling som mulig, nemlig en trapezformet fordeling med eventuelle trykspring. Denne spændingsfordeling, hvis størrelse og angrebepunkt naturligvis skal falde sammen med den beregnede totalpåvirkning, danner udgangspunkt for beregningen af spændingerne i konstruktionen.

Resultatet angives på formen

$$e = \sum (\gamma d) K_\gamma + p K_p + c K_c$$

hvor K^{erne} antager forskellige værdier over og under trykspringet. De kan findes i jordtryksdiagrammerne.

K_γ beregnes ved at antage $p = c = 0$. Den tilhørende brudfigur giver E og z (figur 11.3). Såfremt $\rho \leq 0$ er brudfiguren et zonebrud, og spændingsfordelingen trekantformet. For $\rho > 0$ bliver z forskellig fra en trediedel, og jordtryksfordelingen kan altså ikke være retlinet. Der antages da, at der forekommer et trykspring, hvorved der bliver mulighed for at variere tre parametre, nemlig ξ , K_γ^x og K_γ^y . Da der kun skal bruges to, antages K_γ^x at være uafhængig af ρ og lig med K_γ for $\rho = 0$.



Figur 11.4: Beregning af jordtryk (Lærebog i Geoteknik, eksempel 9.4).

K_p beregnes ved at sætte $\gamma = c = 0$. For $\rho > 0$ vil z være forskellig fra $1/2$, og det vil være nødvendigt at indføre en rektangulær fordeling med trykspring. Da der igen bliver een parameter for meget, vælges det at anvende samme ξ som før, men lade både K_p^x og K_p^y variere, K_c beregnes på lignende måde som K_p .

EKSEMPEL 11.1: Jordtryk på spunsvæg.

I "Lærebog i Geoteknik" eksempel 9.4 er gennemregnet en 1 m høj, lodret væg, der drejer sig om et punkt, der ligger 0,264 m over væggenes toppunkt. Jordens rumvægt er 20 kN/m^3 og $\varphi' = 30^\circ$, medens $c' = 0$. Figur 11.4 er lånt direkte derfra.

Bruddet er gennemregnet efter Brinch Hansens ligevægtsmetode, idet der er anvendt et cirkulært liniebrud med centrum foran væggen. Det betyder, at det stive legeme bevæger sig nedad i forhold til væggen. Først er bestemt spændingerne i brudlinien ved jordoverfladen, og herefter er spæn-

dingsforløbet langs brudlinien bestemt, og den resulterende påvirkning på det stive jordlegeme udregnet (på figuren angivet som N, T og M). Ved ligevægtsbetragtninger findes den resulterende påvirkning (E og F) på væggen og dens angrebspunkt, der ligger 0.42 m over fodpunkt.

Den kinematisk tilladelige løsning er som bekendt et legeme, der roterer om et punkt i den givne højde, men er begrænset af en spiral med stigningsvinklen φ' . Rotationspunktets nøjagtige beliggenhed kan findes ved en ekstremumsbetingelse. Da tilfældet nærmest svarer til aktivt brud, og da beregningen er på den usikre side, skal findes den største værdi af momentet M om rotationspunktet. Legemet gives rotationen $\theta = 1$ omkring omdrejningspunktet og arbejds ligningen giver nu

$$G \cdot \theta \cdot r_G = E \cdot \alpha \cdot r_E + F \cdot \alpha \cdot r_F = M \cdot \alpha$$

det svarer altså til en momentligning.

Med forskellige omdrejningspunkter beregnes M , og den største værdi viser sig at være (figur 11.5):

$$M = 2.95\text{ kN} \cdot \text{m}/\text{m}$$

Herefter kan plasticitetsteorien ikke bringe os længere. Den nøjagtige trykfordeling kendes ikke, men man kunne naturligvis antage trekantsformig fordeling, da det er et γ -led. Havde omdrejningspunktet ligget i væggen, ville det alligevel ikke have hjulpet. Så ville jordtrykket på dele af væggen være "passivt" og på andre dele "aktivt" og der skulle antages et trykspring.

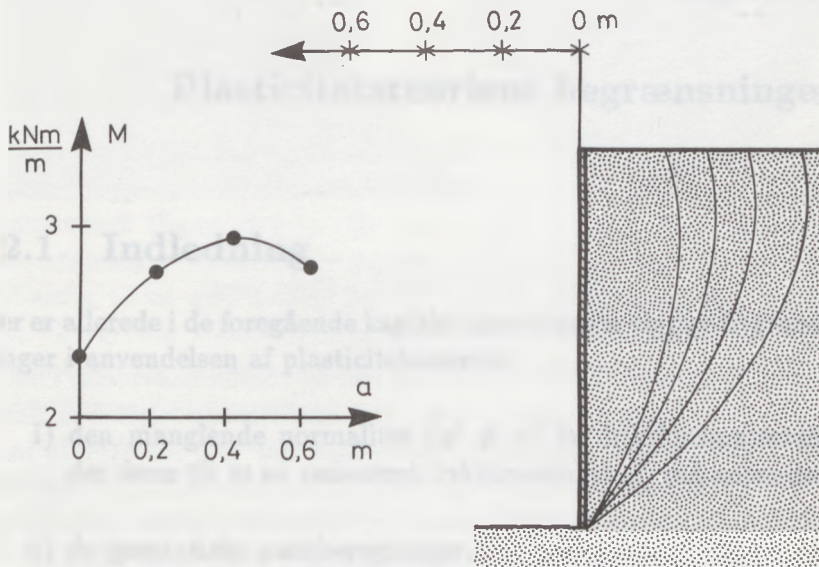
Brinch Hansens ligevægtsmetode giver, at E angriber 0.42 m over fodpunktet. Med den oplysning kan E beregnes, idet $F = E \tan \varphi'$

$$E \cdot 0.84 + E \tan \varphi' \cdot 0.4 = 2.95\text{ kN} \cdot \text{m}/\text{m}$$

giver

$$E = 2.75\text{ kN}/\text{m}$$

altså det samme som ligevægtsmetoden.



Figur 11.5: Kinematisk tilladelige brudfigurer.

... (faded text) ...

... (faded text) ...



... (faded text) ...

$$\sigma = \sigma_y + \epsilon \cdot E \quad (11.1)$$

... (faded text) ...

... (faded text) ...

... (faded text) ...

... (faded text) ...

... (faded text) ...

Plasticitetsteoriens begrænsninger

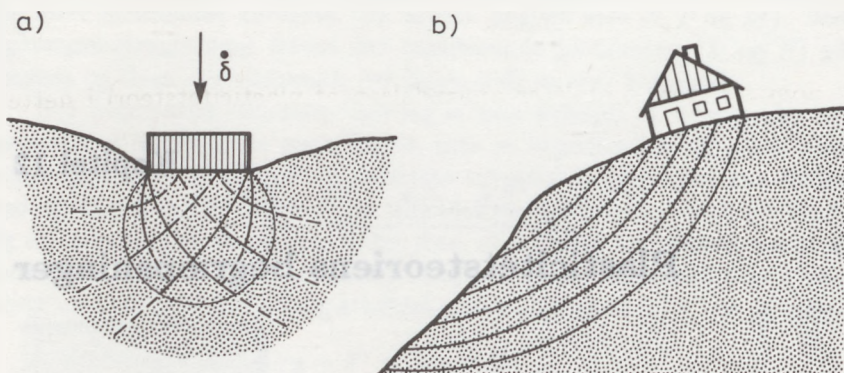
12.1 Indledning

Der er allerede i de foregående kapitler nævnt nogle vigtige begrænsninger i anvendelsen af plasticitetsteorien:

- i) den manglende normalitet ($\varphi' \neq \nu$) for friktionsmateriale, der fører til at en reduceret friktionsvinkel φ'_d må anvendes.
- ii) de geostatiske pæleberegninger, der generes af, at brudfiguren må gå til jordoverfladen, hvad der medfører alt for høje bæreevner, eller at der må skaffes plads til fortrængningen ved "elastiske" bevægelser i områder uden for brudfiguren. De "elastiske" bevægelser vil fremkalde ekstraspændinger i brudfiguren.

En begrænsning af plasticitetsteoriens anvendelighed findes også ved beregning af

- iii) Brud i stabile jordarter. Som det fremgår af afsnit 5.3 er det løst lejrede sandjordarter eller normalkonsolideret ler.



Figur 12.1: "Brud" i stabil jord.

- iv) Progressivt brud. Det er knyttet til volumenudvidelse i ustabile jordarter (afsnit 5.3). Det kan strengt taget kun finde sted under drænedede forhold, men har dog sin største indflydelse på korttidsstabiliteten i hårdt forbelastede lerarter, fordi der kan udvikles smalle, drænedede brudzoner (liniebrud), medens den øvrige lermasse stadig er i udrænet tilstand.

12.2 Brud i stabile jordarter

Såfremt jorden er normalkonsolideret, eller meget løst lejret ($e > e_{cr}$), har plasticitetsteorien begrænset gyldighed.

Zonebrud kan således vanskeligt udvikles fuldt ud. Under fundamenter (figur 12.1 a) vil jorden således falde så meget sammen under brud, at der ikke bliver den fornødne vandrette bevægelse til udvikling af Prandtl-zonerne. Jorden ved siden af fundamentet vil også sætte sig.

Liniebrud kan heller ikke udvikles som forudsat. Såfremt jorden

i et område kommer i brudtilstand, vil den blive stærkere og bruddet søge ind i tilgrænsende områder. På figur 12.1 b) ses virkningen på et stabilitetsbrud.

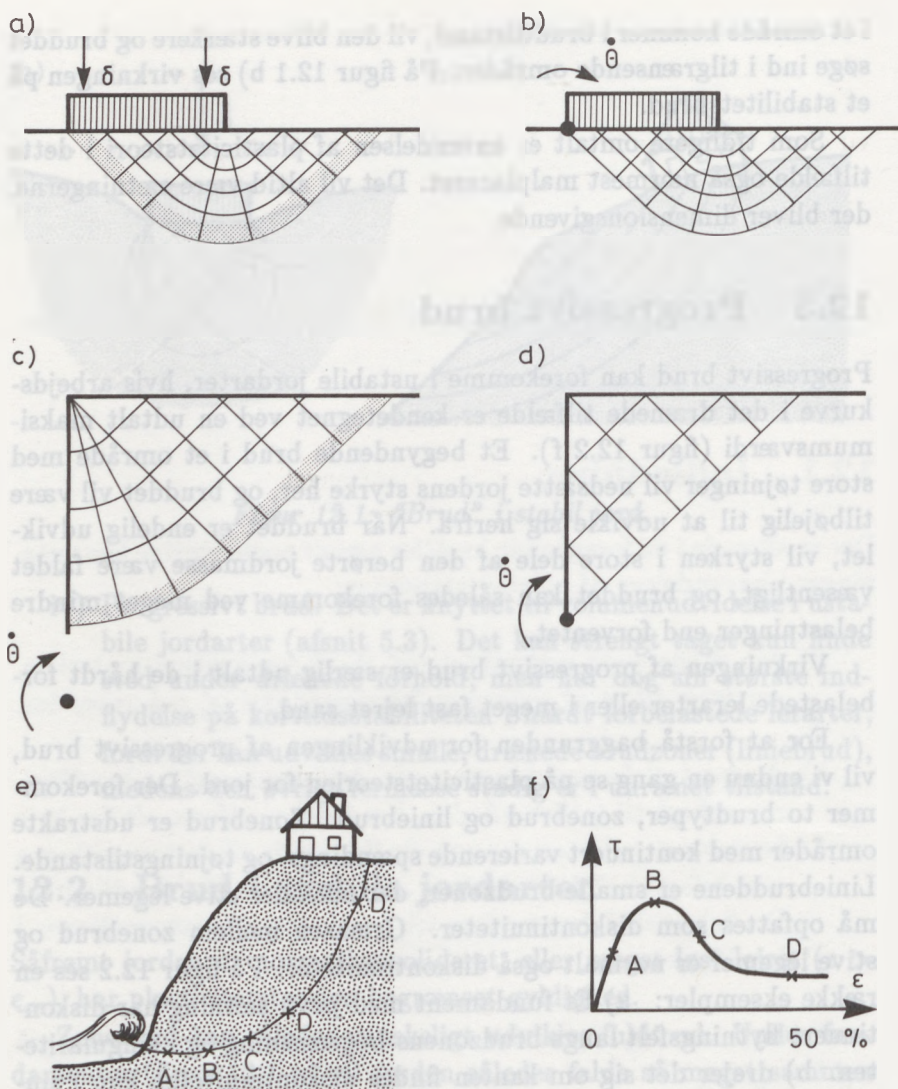
Som tidligere omtalt er anvendelsen af plasticitetsteori i dette tilfælde også nærmest malplaceret. Det vil altid være sætningerne, der bliver dimensionsgivende.

12.3 Progressivt brud

Progressivt brud kan forekomme i ustabile jordarter, hvis arbejds-kurve i det drænedede tilfælde er kendetegnet ved en udtalt maksimumsværdi (figur 12.2 f). Et begyndende brud i et område med store tøjninger vil nedsætte jordens styrke her, og bruddet vil være tilbøjelig til at udvikle sig herfra. Når bruddet er endelig udviklet, vil styrken i store dele af den berørte jordmasse være faldet væsentligt, og bruddet kan således forekomme ved meget mindre belastninger end forventet.

Virkningen af progressivt brud er særlig udtalt i de hårdt for-belastede lerarter eller i meget fast lejret sand.

For at forstå baggrunden for udviklingen af progressivt brud, vil vi endnu en gang se på plasticitetsteorien for jord. Der forekommer to brudtyper, zonebrud og liniebrud. Zonebrud er udstrakte områder med kontinuert varierende spændings- og tøjningstilstande. Liniebruddene er smalle brudzoner, der adskiller stive legemer. De må opfattes som diskontinuiteter. Grænsen mellem zonebrud og stive legemer er normalt også diskontinuiteter. På figur 12.2 ses en række eksempler: a) Et fundament med jævn sætning har diskontinuert flytningsfelt langs brudzonens begrænsning og i singulariteten. b) drejer det sig om kanten findes diskontinuiteten kun i singulariteten, c) også ved lodrette vægge forekommer diskontinuerte flytningsfelter. En undtagelse (den eneste ?) ses i d). Her vokser flytningshastigheden jævnt fra 0 ved brudzonens begrænsning og der forekommer ikke singulariteter. Det bedst kendte eksempel på



Figur 12.2: Diskontinuiteter i forskellige brudformer (i materiale med meget lille friktionsvinkel).

diskontinuiteter ses i e) stabilitet af skråning.

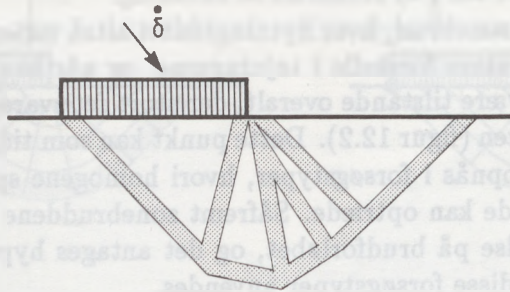
I det indre zonebrud, hvor flytningsfeltet altså varierer jævnt, vil der ikke være store forskelle i tøjningerne, og når brud indtræffer, vil der derfor være tilstande overalt, der stort set svarer til punkt B på arbejdskurven (figur 12.2). Dette punkt kan som tidligere omtalt (kap. 5) kun opnås i forsøgstyper, hvori homogene spændings- og tøjningstilstande kan optræde. Såfremt zonebruddene har dominerende indflydelse på brudforløbet, og det antages hyppigt at være tilfældet, skal disse forsøgstyper anvendes.

I diskontinuiteterne optræder så store tøjninger, at det er muligt at den kritiske tilstand nås. (D på figur 12.2.) I det viste eksempel e) kan man således forestille sig, at en skråning endnu er stabil, på trods af at store dele af "bruddet" forlængst er i den kritiske tilstand. Det er i dette eksempel klart, at der ved en sikkerhedsanalyse skal anvendes de styrkeparametre, de såkaldte residuelle styrkeparametre, som svarer til den kritiske tilstand. Herved vil analysen være lidt på den sikre side.

I laboratorieforsøg med homogene tilstande kan den kritiske tilstand ikke opnås, fordi det kræver meget store tøjninger, som ikke kan produceres i disse apparattyper. I stedet må anvendes forsøg af type b) i figur 5.1 eller type e) i figur 5.2. Heri optræder liniebrud og progressivt brud. Da tøjningerne i liniebruddet ikke kan måles, kan maksimumspunktet ikke bruges til noget. Kun den kritiske tilstand, hvor forskydningsstyrken er uafhængig af tøjningen, kan anvendes og bestemmer da netop de residuelle parametre.

Figur 12.2 viser således, at progressivt brud i nogle tilfælde kan forudsiges (fx e)), medens det i andre tilfælde kan afvises (fx d)). I de fleste tilfælde er det imidlertid vanskeligt at overskue og nogen eksakt fremgangsmåde til fastlæggelse af risiko for progressivt brud foreligger ikke. Endnu et forhold, der komplicerer situationen, skal nævnes.

Det er i kapitel 6 vist, at der er mange vidt forskellige kinematisk tilladelige brudfigurer til det samme brudproblem (se eksempel 6.2,



Figur 12.3: Kinematisk tilladelig brudfigur.

6.3, 6.6). De ser meget forskellige ud, men det samlede indre arbejde varierer kun lidt.

Muligheden for progressivt brud er imidlertid meget forskellig. En brudfigur af den type, der er vist i figur 12.3, vil udvikle progressivt brud langs alle de stive legemer og kan derfor eventuelt være farligere end den brudfigur, der er korrekt, såfremt progressivt brud ikke forekommer.

Progressivt brud kan i princippet aldrig forekomme i den udrændede tilstand, fordi den kritiske tilstand nås i maksimumspunktet (figur 12.2 c), men alligevel er det i såkaldt "udrændede" tilfælde, at de største afvigelser mellem teori og natur er konstateret. Hvis bruddet nemlig har mulighed for at udvikle sig progressivt i smalle brudzoner, vil de vandmængder, der gør bruddet drænet, være så små, at tilgrænsende områder sagtens kan levere vandet (og samtidig blive stærkere). Det er således en drænet proces, men med så små drænveje, at dræningen foregår meget hurtigt og opfattes som udrænet.

Nogle af de tertiære plastiske lerarter og de mest forbelastede moræneler er så ustabile, at bæreevne af fundamenter kun udgør 30% af den værdi, der bestemmes af vingeforsøg, der jo udføres så hurtigt, at dræning selv i smalle zoner ikke kan nå at finde sted.

Det kan være forklaringen på, at såkaldt sprækket lers forskydningsstyrke kun er 25-30% af vingestyrken.

Populært udtrykt, er det vanskeligt at angive den bedst mulige brudfigur, fordi der er så mange at vælge imellem (se for eksempel figur 8.5, 8.6 og 8.8). Men det bliver næsten umuligt, såfremt progressivt brud kan forekomme. Der vil formentlig i visse tilfælde være flere løsninger på det samme problem !

Det kendes fra pladebelastningsforsøg på fx moræneler, hvor opskydningen af jordoverfladen ved siden af pladen kan have meget forskelligt forløb, varierende fra et rent "plastisk" udseende til kraftige sprækkedannelser. Der skal i sådanne tilfælde kun få inhomogeniteter til at bestemme den endelige brudform.

Den nye teori om plasticitetsteoriens begrænsninger er blevet udviklet af den amerikanske fysiker og matematiker, professor i fysik ved Princeton-universitetet, John D. Eshelby.

Professor Eshelby er den eneste person, der har modtaget Nobelprisen i fysik for sit arbejde med plasticitetsteoriens begrænsninger. Han har modtaget prisen for sit arbejde med at udvikle teorier om plasticitetsteoriens begrænsninger, som har givet os en bedre forståelse af, hvordan materialer opfører sig under tryk og varme.

Den nye teori om plasticitetsteoriens begrænsninger er blevet udviklet af den amerikanske fysiker og matematiker, professor i fysik ved Princeton-universitetet, John D. Eshelby. Han har modtaget Nobelprisen i fysik for sit arbejde med plasticitetsteoriens begrænsninger, som har givet os en bedre forståelse af, hvordan materialer opfører sig under tryk og varme.

Den nye teori om plasticitetsteoriens begrænsninger er blevet udviklet af den amerikanske fysiker og matematiker, professor i fysik ved Princeton-universitetet, John D. Eshelby. Han har modtaget Nobelprisen i fysik for sit arbejde med plasticitetsteoriens begrænsninger, som har givet os en bedre forståelse af, hvordan materialer opfører sig under tryk og varme.

Den nye teori om plasticitetsteoriens begrænsninger er blevet udviklet af den amerikanske fysiker og matematiker, professor i fysik ved Princeton-universitetet, John D. Eshelby. Han har modtaget Nobelprisen i fysik for sit arbejde med plasticitetsteoriens begrænsninger, som har givet os en bedre forståelse af, hvordan materialer opfører sig under tryk og varme.

Den nye teori om plasticitetsteoriens begrænsninger er blevet udviklet af den amerikanske fysiker og matematiker, professor i fysik ved Princeton-universitetet, John D. Eshelby. Han har modtaget Nobelprisen i fysik for sit arbejde med plasticitetsteoriens begrænsninger, som har givet os en bedre forståelse af, hvordan materialer opfører sig under tryk og varme.

Den nye teori om plasticitetsteoriens begrænsninger er blevet udviklet af den amerikanske fysiker og matematiker, professor i fysik ved Princeton-universitetet, John D. Eshelby. Han har modtaget Nobelprisen i fysik for sit arbejde med plasticitetsteoriens begrænsninger, som har givet os en bedre forståelse af, hvordan materialer opfører sig under tryk og varme.

Appendix A

Coulombs brudbetingelse

Coulombs brudbetingelse lyder i sin sædvanlige form:

$$\tau_f = \sigma'_f \tan \varphi' + c' \quad (\text{A.1})$$

idet der her indsættes den numeriske værdi af τ_f .

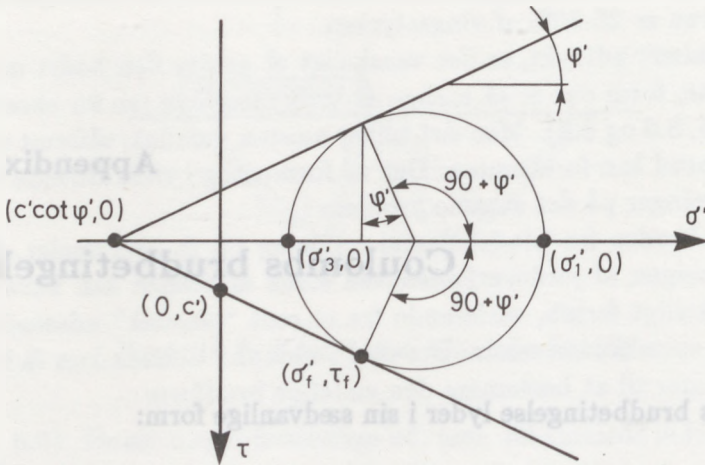
I denne bog anvendes andre udformninger, der let fås af den oprindelige ligning.

Således anvendes fx i formel (5.3) formen

$$\tau_f = (\sigma'_f + a) \tan \varphi' \quad \text{hvor} \quad a = c' \cot \varphi' \quad (\text{A.2})$$

a kaldes efter Janbus forslag for attraktionen. Såfremt en jord har både kohæsion og friktion, kan man altså alligevel regne med en ren friktionsjord, såfremt alle spændinger korrigeres med størrelsen a .

Brudbetingelsen fremstilles i et τ , σ' -diagram (figur A.1) som to rette linier, symmetriske om σ' -aksen. Berører Mohrs cirkel linierne, er brudbetingelsen opfyldt i to snitretninger a og b , men ellers ikke. Brudlinierne indses let (figur 3.7) at danne vinklen $90 - \varphi'$ med hinanden. Hovedsnittene ligger i vinkelhalveringslinien og største hovedspænding halverer den spidse vinkel mellem a og b . Det ses endvidere, at forskydningsspændingen τ vender bort fra den spidse vinkel, og at τ er positiv i a -snitretningen.



Figur A.1: Coulombs brudbetingelse

A.1 Hovedspændinger

Brudbetingelsen kan også udtrykkes i hovedspændinger. Det bemærkes først, at den mellemste hovedspænding ikke indgår. Af figur A.1 ses, at

$$\sigma'_{max} - \sigma'_{min} = (\sigma'_{max} + \sigma'_{min}) \sin\varphi' + 2c' \cos\varphi' \quad (\text{A.3})$$

der er identisk med formel (5.9), (5.19) og (9.1) for $c' = 0$.

Den omformes let til

$$\sigma'_{max} = \frac{1 + \sin\varphi'}{1 - \sin\varphi'} \sigma'_{min} + 2c' \frac{\cos\varphi'}{1 - \sin\varphi'} \quad (\text{A.4})$$

sml. formel (5.15), der efter nogen regning giver

$$\sigma'_{max} = \tan^2(45 + \frac{\varphi'}{2}) \sigma'_{min} + 2c' \tan(45 + \frac{\varphi'}{2}) \quad (\text{A.5})$$

der fx benyttes i formel (5.18) og (9.13).

A.2 Triaxialforsøg

I triaxialforsøg måles $\sigma'_{max} - \sigma'_{min}$, der er diameter i Mohrs cirkel, samt kammertrykket σ'_3 , der oftest er $\sigma'_3 = \sigma'_{min}$. Idet

$$\sigma'_{max} + \sigma'_{min} = (\sigma'_{max} - \sigma'_{min}) + 2\sigma'_{min}$$

fås af (A.3)

$$\begin{aligned} (\sigma'_{max} - \sigma'_{min}) &= ((\sigma'_{max} - \sigma'_{min}) + 2\sigma'_{min}) \sin\varphi' \\ &\quad + 2c' \cos\varphi' \end{aligned}$$

hvoraf

$$(\sigma'_{max} - \sigma'_{min}) = \frac{2 \sin\varphi'}{1 - \sin\varphi'} (\sigma'_{min} + c' \cot\varphi') \quad (\text{A.6})$$

hældningen af brudlinien β i et σ'_{min} , $\sigma'_{max} - \sigma'_{min}$ diagram er da

$$\tan\beta = \frac{1 - \sin\varphi'}{2 \sin\varphi'}$$

For $\sigma'_{min} = 0$ er

$$b = \sigma'_{max} - \sigma'_{min} = \frac{2 \cos\varphi'}{1 - \sin\varphi'} c' = \cot\varphi' \cot\beta c'$$

A.3 Radius og centrum i Mohrs cirkel: τ_r og σ'_c

I formel (5.4) anvendes radius i Mohrs cirkel

$$\tau_r = \frac{1}{2}(\sigma'_{max} - \sigma'_{min})$$

hvorved (A.6) bliver:

$$\tau_r = \frac{\sin\varphi'}{1 - \sin\varphi'} (\sigma'_{min} + a) \quad (\text{A.7})$$

eller ved at indføre $\sigma'_c = \frac{1}{2}(\sigma'_1 + \sigma'_3)$:

$$\tau_r = c' \cos\varphi' + \sigma'_c \sin\varphi'$$

der anvendes i formel (5.25) og (10.2).

A.4 Middelspænding og deviatorspænding: p' og q'

I geoteknisk litteratur anvendes ofte to størrelser

$$q' = \sigma'_{max} - \sigma'_{min} \quad \text{og} \quad p' = \sigma'_m$$

Idet

$$\begin{aligned} \sigma'_{max} + \sigma'_{min} &= \frac{2}{3}(\sigma'_{max} + 2\sigma'_{min}) + \frac{1}{3}(\sigma'_{max} - \sigma'_{min}) \\ &= 2p' + \frac{1}{3}q' \end{aligned}$$

fås af (A.3):

$$q' = \left(2p' + \frac{1}{3}q'\right) \sin\varphi' + 2c' \cos\varphi'$$

eller

$$q' = \frac{6\sin\varphi'}{3 - \sin\varphi'} (p' + c' \cot\varphi') \quad (\text{A.8})$$

Afbildning af tredimensionale spændingstilstande

På figur B.1 ses et koordinatsystem med tre akser. En tredimensional spændingstilstand kan i rummet angives ved et punkt med koordinaterne $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, men rummet kan ikke afbildes i en plan. Stedvektoren til punktet $\bar{\sigma}$ kan betragtes som vektorielt sammensat af tre vektorer i $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ -koordinatsystemet eller i et andet ortogonalt koordinatsystem med enhedsvektorerne \bar{m}_1, \bar{m}_2 og \bar{m}_3 :

$$\begin{aligned}\bar{\sigma} &= \sigma_1 \cdot \bar{i} + \sigma_2 \cdot \bar{j} + \sigma_3 \cdot \bar{k} \\ &= \sigma_{m1} \cdot \bar{m}_1 + \sigma_{m2} \cdot \bar{m}_2 + \sigma_{m3} \cdot \bar{m}_3\end{aligned}\quad (\text{B.1})$$

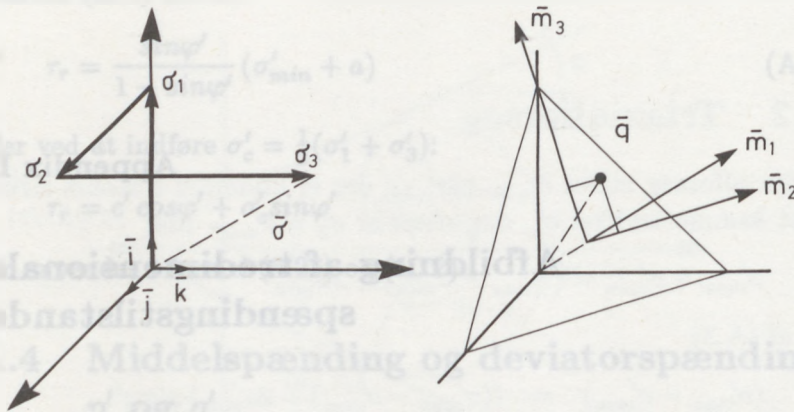
\bar{m}_1 vælges til $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ svarende til oktaederplanet, \bar{m}_2 vælges således, at den ligger i et vandret plan, dvs. $\bar{m}_2 = (0, \alpha, \beta)$. Idet $\bar{m}_1 \cdot \bar{m}_1 = 1$ og $\bar{m}_1 \cdot \bar{m}_2 = 0$, ses at $\alpha + \beta = 0$ og $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. Heraf

$$\bar{m}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, -1, 1)$$

idet fortegnet for \bar{m}_2 er valgt i overensstemmelse med figur B.1. \bar{m}_3 koordinater findes af $\bar{m}_1 \cdot \bar{m}_3 = 0$, $\bar{m}_2 \cdot \bar{m}_3 = 0$ og $\bar{m}_3 \cdot \bar{m}_3 = 1$.

Heraf

$$\bar{m}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(2, -1, -1)$$



Figur B.1: Afbildning af spændingsvektor.

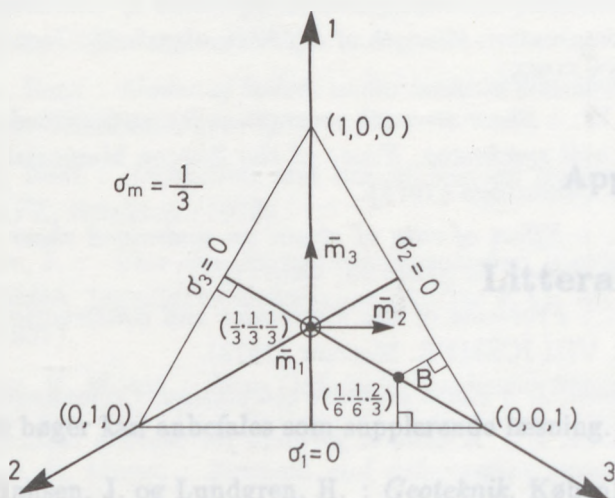
hvor fortegnet for \bar{m}_3 er valgt i overensstemmelse med figuren.

Det ses at

$$\begin{aligned}\sigma_{m1} &= \bar{\sigma} \cdot \bar{m}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \\ \sigma_{m2} &= \bar{\sigma} \cdot \bar{m}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_3 - \sigma_2) \\ \sigma_{m3} &= \bar{\sigma} \cdot \bar{m}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3)\end{aligned}\tag{B.2}$$

Betragtes afbildningsplanet fra et sted på normalen, fås figur B.2, hvor afbildningsplanets spor i koordinatplanerne udgør en ligesidet trekant. Trekantens størrelse afhænger af σ_{m1} , medens $(\sigma_{m2}, \sigma_{m3})$ er koordinaterne til spændingspunktet. Spændingspunktets tre frihedsgrader (koordinater) er således transformeret over i tre nye frihedsgrader: målestoksforholdet (σ_{m1}) og to koordinater.

Afbildningsplanet bygger på en opløsning af en vektor efter tre retninger, medens oktaederplanet bygger på en ligevægtsbetragt-



Figur B.2: Oktaederplanet som afbildningsplan.

ning. Da oktaederplanet areal er $\sqrt{3}$ gange større end koordinat-trekanterne, skal σ_{m1} i formel (B.2) blot divideres med $\sqrt{3}$ for at opnå, at formel (B.2) fremstiller oktaederplanet's spændingsforhold. Derfor kan man benytte følgende lettere fremgangsmåde. Figur B.2 betragtes som oktaederplanet. $\sigma_1 = 0$ langs trekantens nedre kant, og lig med $3 \cdot \sigma_m$ i trekantens øvre spids, og σ_1 varierer lineært i lodret retning. Hermed er målestoksforholdet fastlagt. Variationen af σ_2 og σ_3 indses på samme måde ved at rotere papiret 120° pr. gang. Spændingspunktet bestemmes ved afsætning af 2 koordinater, den sidste har allerede været benyttet til at fastlægge målestoksforholdet.



Fig. 1.1. Afbildning af rummet i rummet.

Denne afbildning er en lineær afbildning, som kan beskrives ved hjælp af en 3x3 matrix. Hvis vi betragter rummet som et vektorrum over reelle tal, så kan afbildningen T defineres som $T(x, y, z) = (x', y', z')$. De givne punkter i figuren er nogle af de punkter, som afbildes på sig selv eller på hinanden. For eksempel er $(0,0,1)$ et punkt, som afbildes på $(0,0,1)$, mens $(1,0,0)$ afbildes på $(0,1,0)$. Dette viser, at afbildningen er en rotation og en skævvridning af rummet. Den præcise form af afbildningen kan bestemmes ved at løse ligningerne, som følger af de givne punkter. Dette er en typisk opgave i lineær algebra og geometri, og den kræver en grundforståelse af vektorrum og lineære afbildninger.

Appendix C

Litteraturliste

Følgende bøger kan anbefales som supplerende læsning.

Brinch Hansen, J. og Lundgren, H. : *Geoteknik*. København (1965).

Chen, W.-F. : *Limit analysis and soil plasticity*. Amsterdam (1975).

Hansen, Bent : *Geoteknik og fundering*. København (1978).

Harr, M. E. : *Foundations of theoretical soil mechanics*. New York (1966).

Harremoës, Krebs Ovesen, Moust Jacobsen : *Lærebog i Geoteknik*. København (1980).

Kezdi, A. : *Erddrucktheorien*. Berlin (1962).

Nielsen, M. P., Pilegård Hansen, L., Rathkjen, A. : *Rumlige deformations- og spændingstilstande*. Mekanik 2.2. Aalborg (1970).

Schofield and Wroth : *Critical state soil mechanics*. London (1968).

Den væsentligste del af den teoretiske baggrund udgøres af følgende artikler og afhandlinger:

Beer, E. E. de : *Experimental determination of the shape factors and the bearing capacity factors of sand*. Geotechnique. Vol. 20 (1970).

- Bishop, A. W. and Green, G. : *The influence of end restraint on the compression strength of a cohesionless soil*. Geotechnique. Vol. 15 (1965).
- Bishop, A. W. : *Shear strength parameters for undisturbed and remolded soil specimens*. Proc. of the Roscoe Memorial Symposium. Cambridge (1971).
- Bjerrum, L. : *Effect of rate of strain on undrained shear strength of soft clay*. NGI publ. 85. Oslo (1971).
- Bjerrum, L. : *Problems of soil mechanics and construction on soft clays*. VIII ICSMFE. Moscow (1973).
- Brinch Hansen, J. : *Earth pressure calculation*. Copenhagen (1953).
- Brinch Hansen, J. : *A general formula for bearing capacity*. DGI Bulletin 11 (1961).
- Brinch Hansen, J. : *The ultimate resistance of rigid piles against transversal forces*. DGI Bulletin 12 (1961).
- Brinch Hansen, J. : *Støttemures bæreevne*. B-undervisning og -forskning (1962).
- Brinch Hansen, J. : *Three-dimensional effect in stability analysis*. DGI Bulletin 21 (1966).
- Brinch Hansen, J. : *Some empirical formulas for the shear strength of Molsand*. DGI Bulletin 26 (1968).
- Brinch Hansen, J. : *A revised and extended formula for bearing capacity*. DGI Bulletin 28 (1970).
- Bønding, Niels : *Triaxial state of failure in sand*. DGI Bulletin 30 (1977).
- Green, G.E. : *Strength and deformation of sand measured in an independent stress control cell*. Proc. of the Roscoe Memorial Symposium. Cambridge (1971).
- Hansen, Bent : *Line ruptures regarded as narrow rupture zones*. Proc. of Earth Pressure Problems. Brussels (1958).
- Hansen, Bent : *Shear box tests on sand*. V ICSMFE. Paris (1961).

- Hansen, Bent : *A theory of plasticity for ideal frictionless materials*. Copenhagen (1965).
- Hansen, Bent : *Modes of failure under inclined eccentric loads*. BOSS '76. Trondheim (1976).
- Hansen, Bent : *Definition and use of friction angles*. VII ECS-MFE. Brighton (1979).
- Hvorslev, J. : *Über die Festigkeiteigenschaften gestörter bindiger Böden*. Ingeniørvidenskabelige Skrifter A nr. 45. København (1937).
- Jacobsen, H. Moust : *New Oedometer and new triaxial apparatus for firm soils*. DGI Bulletin 27. København (1970).
- Jacobsen, H. Moust : *Strength and deformation properties of pre-consolidated moraine clay*. DGI Bulletin 27. København (1970).
- Jacobsen, H. Moust : *Sands styrke*. NGM. København (1975).
- Jacobsen, H. Moust : *Terningapparatet*. Väg- och Vattenbyggaren 8-9. Stockholm (1976).
- Jacobsen, H. Moust : *Triaxial testing in the design of shallow foundations*. VII ECSMFE. Brighton (1979).
- Jacobsen, H. Moust : *Triaxialforsøg på sand*. NGM. Helsingfors (1979).
- Jacobsen, H. Moust : *Discussion on laboratory methods*. X ICS-MFE. Stockholm (1981).
- Jacobsen, H. Moust : *Dilatancy and Cohesion in Friction Materials*. Proc. XII ICSMFE. Rio de Janeiro (1989).
- Janbu, N. : *Soil models in offshore engineering*. Geotechnique Vol. 35 No. 3 (1985).
- Lade, P. V. : *The stress-, strain-, and strength characteristics of cohesionless soils*. Berkeley. California (1972).

- Lundgren, H. and K. Mortensen : *Determination by the theory of plasticity of the bearing capacity of continuous footing in sand.* Proc. III ICSMFE. Zurich (1950).
- Pearce, J. A. : *A new true triaxial apparatus.* Proc. of the Roscoe Memorial Symposium. Cambridge (1971).
- Prandtl, L. : *Über die Härte plastischer Körper.* Nachr. d. Ges. d. Wiss. Göttingen (1920).
- Rankine, W. J. M. : *On the stability of loose earth.* Trans. Royal Soc. Vol. 147. London (1857).
- Roscoe, K. H., Basset, R. H. and E. R. L. Cole : *Principal axes observed during simple shear of sand.* Geotech Conference. Oslo (1967).
- Roscoe, K. H. : *New laboratory methods of investigating soil behaviour.* VII ICSMFE. Mexico (1969).
- Roscoe, K. H. : *The influence of strains in soil mechanics.* Geotechnique (1970).
- Rowe, P. W. : *The stress dilatancy relation for static equilibrium of an assembly of particles in contact.* Proc. of Royal Society of London. (1962).
- Rowe, P. W. and Barden : *Importance of free ends in triaxial testing.* Proc. ASCE Vol. 96 SO11 (1964).
- Rowe, P. W. : *Theoretical meaning and observed value of deformation parameters for soil.* Proc. of the Roscoe Memorial Symposium. Cambridge (1971).
- Skempton, A. W. and L. Bjerrum : *A contribution to the settlement analysis of foundations on clay.* Geotechnique Vol. VII, Dec. (1957).
- Steenfeldt, Jørgen S. : *The pin model — an analogue model of sand in plane strain.* DGI Bulletin 33. (1979).

Appendix D

Symbolliste

Følgende liste omfatter næsten alle de symboler der er anvendt. Såfremt symbolerne er defineret i teksten eller på en tilhørende figur, er de dog ikke anført.

A	: Poretrykskoefficient	
\bar{A}	: Retningsmatrix	
A	: Arbejde	<i>Joule</i>
	A_i : Indre arbejde	
	A_y : Ydre Arbejde	
a	: Attraktion	<i>kN/m²</i>
	a_t : Tangentværdi	
	a_a : Asymptoteværdi	
a -linie	: Linie med positiv værdi af τ	
B	: Bredde	<i>m</i>
b	: Spændingstilstandsparameter	
b	: Bæreevne	<i>kN/m²</i>
b -linie	: Linie med negativ værdi af τ	
C	: Kerisels konstant	
C	: Konsolideringsindex	
c	: Kohæsion	<i>kN/m²</i>
	c' : Effektiv kohæsion	
	c_t : Tangentværdi	

	c_a	: Asymptoteværdi	
	c_d	: Reduceret værdi	
c_u	:	Udrænet forskydningsstyrke	kN/m^2
	c_v	: Vingestykke	
\bar{D}	:	Tøjningstensor	
\underline{D}	:	Tøjningsvektor	
E	:	Jordtryk	$kN, kN/m$
e	:	Poretal	
	e_{cr}	: Kritisk porotal	
e	:	Enhedsjordtryk	kN/m^2
F	:	Areal	m^2
F	:	Tangentielt jordtryk	$kN, kN/m$
f	:	Enhedstangentieljordtryk	kN/m^2
G	:	Egenvægt	$kN, kN/m$
g	:	Tyngdeacceleration	m/s^2
H	:	Højde	m
h	:	Trykniveau	m
h_c	:	Kapillar stighøjde	m
I_D	:	Relativ lejringstæthed	
I_p	:	Plasticitetsindex	
I_1, I_2, I_3	:	Spændingsinvarianter	
K	:	Jordtrykoefficient	
	K_γ, K_p, K_c		
k	:	Permeabilitetskoefficient	m/s
L	:	Længde	m
m	:	Masse	kg
m	:	Krumningsparameter (brud)	
N	:	Bæreevnefaktor	
	$N_\gamma, N_q, N_c, N_c^0$		
p	:	Resulterende spænding	kN/m^2
\underline{q}	:	Overfladelast	kN/m^2
\bar{S}	:	Spændingstensor	

\bar{S}	: Spændingsvektor	
U	: Uensformighedstal	
U	: Effekt (arbejde pr. tidsenhed)	
	U_r : Randeffekt	
	U_z : Zoneeffekt	
	U_i : Indre effekt	
	U_y : Ydre effekt	
u	: Poretryk	kN/m^2
V	: Volumen	m^3
w	: Flytningsvektor	m
w	: Vandindhold	
\dot{w}	: Hastighed	m/s
α	: Styrkeparameter (v. Mises og Tresca)	
γ	: Specifik tyngde (rumvægt)	kN/m^3
	γ_w : Vands rumvægt	
	γ' : Reduceret rumvægt	
γ_{xy}	: Tværtøjning (vinkeldrejning)	
	γ_n : Drejning af snit n	
δ	: Flytning	m
δ	: Vægfriktionsvinkel	
ε	: Tøjning (relativ sammentrykning)	
	$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$: Retningsbestemte hovedtøjninger	
	ε_{max} : Største tøjning	
	ε_{min} : Mindste tøjning	
	ε_v : Volumenændring	
	ε_m : Middeltøjning. Invariant	
	ε_n : Tøjning i snit n	
	$\dot{\varepsilon}$: Tøjningshastighed	
ν	: Dilatationsvinkel	
ξ	: Relativ højde af trykspring	
ρ	: Densitet	kg/m^3
ρ	: Relativ højde af rotationspunkt	
σ	: Normalspænding (tryk)	kN/m^2

	σ'	: Effektiv normalspænding	
	$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$: Retningsbestemte normalspændinger	
	σ_{max}	: Største hovedspænding	
	σ_{int}	: Mellemste hovedspænding	
	σ_{min}	: Mindste hovedspænding	
	σ_m	: Middelspænding. Invariant	
	σ_n	: Normalspænding på snit n	
	$\sigma_c = 1/2 (\sigma_{max} + \sigma_{min})$		
	σ_{pc}	: Forbelastningstryk	
τ	:	Forskydningsspænding	kN/m^2
	$\tau_r = 1/2 (\sigma_{max} - \sigma_{min})$		
	τ_f	: Brudværdi	
	τ_n	: Forskydningsspænding i snit n	
	τ_{oct}	: Oktaederværdi	
φ	:	Friktionsvinkel	
	φ'	: Effektiv friktionsvinkel	
	φ_t	: Tangent friktionsvinkel	
	φ_a	: Asymptoteværdi	
	φ_d	: Reduceret værdi	
	φ_{pl}	: \sim plan tilstand	
	φ_{tr}	: \sim triaxial tilstand	
	φ_μ	: "Indre friktionsvinkel"	
φ_{xy}	:	Ændring af ret vinkel	
θ	:	Væghældning med lodret	
μ	:	Poissons forhold	